***Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике***

***Ханты-Мансийский автономный округ – Югра***

***2012-2013 учебный год***

Ответы и решения.

**7 класс**

1. К некоторому трехзначному числу приписали цифру 7 сначала справа, а потом слева – получили два четырехзначных числа, разность которых (из большего вычитается меньшее) равна 1809. Найдите все такие трехзначные числа.

**Ответ**: 978; 576.

***Решение.*** Пусть искомое трехзначное число имеет вид $\overbar{abc}$. После приписывания к нему слева и справа цифры 7 получим четырехзначные числа $\overbar{7abc} и \overbar{abc7}$. Если первое число больше, то имеем $\overbar{ 7abc}- \overbar{abc7}=1809$. Откуда, *c =* 9 + 7 – 10 =6, *b =* 0 + 6 + 1 = 7, *a* = 8 + 7 – 10 = 5 и 1 + 5 + 1 = 7. Если же второе число больше, то $\overbar{abc7}-\overbar{7abc}=1809$. Аналогично находим, *c* = 7 + 10 – 9 = 8, *b* = 8 – 1 = 7, *a* = 7 + 10 – 8 = 9, и 9 – 1 – 7 = 1.

*Примечание. Если найдено одно число – 5 баллов.*

1. Внутри отрезка *AB* взяли произвольную точку *M*. Точка *C* – середина отрезка *AM*, а точка *D* – середина отрезка *MB*. Наконец, точка *P* – середина отрезка *CM*, а точка *Q* – середина отрезка *MD*. Найдите длину отрезка *PQ*, если длина отрезка *AB* равна 40 сантиметрам.

**Ответ:** 10 см.

***Решение****.* Вначале найдем длину отрезка *CD*. По условию, длина отрезка *CM* равна половине длины отрезка *AM*, а длина отрезка *MD* – половине отрезка *MB*. Следовательно,  *CD* = *CM* + *MD* = $\frac{1}{2}AM+\frac{1}{2}MB=\frac{1}{2}AB=20 см$. Аналогично показывается, что длина отрезка *PQ* равна половине отрезка *CD*.

*Примечание. Найден правильный ответ без обоснования – 6 баллов. Если ответ не получен или получен не верный, но показано, что длина отрезка CD равна половине длины отрезка AB – 3 балла.*

1. Известно, что с полным баком топлива моторная лодка проплывет 60 км по течению реки или 40 км против течения реки. На какое наибольшее расстояние можно отплыть по реке на этой лодке, чтобы топлива хватило и на обратный путь.

**Ответ:** 24 км.

***Первое решение.*** На 1 км по течению реки моторная лодка расходует $^{1}/\_{60}$ бака топлива, а на 1 км против течения реки - $^{1}/\_{40} $ бака топлива. Таким образом, если лодка проплывет 1 км по течению и обратно (все равно в какой последовательности), то она затратит $\frac{1}{60}+\frac{1}{40}=\frac{1}{24}$ бака топлива. Следовательно, полного бака топлива лодке хватит, чтобы отплыть и вернуться назад не более чем на 24 км.

***Второе решение***. Предположим, что лодка проплыла 120 км по реке туда и обратно. Тогда на весь путь она затратит ровно 5 баков топлива: 2 бака при движении по течению и 3 бака при движении против течения. Следовательно, с одним баком топлива лодка может проплыть туда и обратно расстояние в 5 раз меньшее, то есть 24 км. То, что это расстояние наибольшее, следует из обратных рассуждений. Если бы лодка с одним баком топлива могла бы отплыть более чем на 24 км, то с пятью баками топлива она могла бы проплыть туда и обратно более 120 км, что не возможно.

*Примечание. Арифметическая ошибка при верных рассуждениях – минус 1-2 балла.*

1. Фигуру, изображенную на рисунке, разрежьте на две равные части так, чтобы в каждой части было по одной звездочке. Разрезать можно только по линиям сетки.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  | \* | \* |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

***Решение.***

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  | \* | \* |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

*Примечание. При условиях задачи, решение единственное – 0 или 7 баллов.*

1. В куче 2012 камешков. Двое по очереди забирают их из кучи. За один ход можно взять от одного до десяти камешков. Выигрывает тот, кто заберет последние камешки. У кого из игроков – у начинающего или у его партнера – имеется выигрышная стратегия?

**Ответ:** у начинающего.

***Решение.*** Поскольку за один ход берется от одного до десяти камешков, то любой предыдущий ход всегда можно дополнить до 11 камней, причем это число единственное. И, так как 2012 = 11$∙182+10$, то начинающий игрок первым ходом берет 10 камешков, а каждым следующим своим ходом дополняет ход партнера до 11.

*Примечание. Верный ответ при неверном обосновании – 1 балл.*

**8 класс**

1. Если к любому трехзначному числу приписать слева любую, кроме нуля, цифру, то получится четырехзначное число. Если к тому же трехзначному числу приписать справа ту же цифру, то получится второе четырехзначное число. Если теперь из большего четырехзначного числа вычесть меньшее, то разность разделится на 9. Докажите.

***Доказательство.*** Пусть $\overbar{abc}$ исходное трехзначное число и к нему слева и справа приписывается не нулевая цифра *d*. Тогда при приписывании слева получим четырехзначное число $\overbar{dabc}=1000d+\overbar{abc}$, а при приписывании справа получим четырехзначное число $\overbar{abcd}=10\overbar{abc}+d$. Если первое число больше, то их разность равна $999d-9\overbar{abc}$, если больше второе, то разность равна $9\overbar{abc}-999d$. В обоих случаях разность делится на 9.

*Примечание. Рассмотрен один случай разности – минус 1 балл. Если в качестве доказательства рассмотрены частные случаи (конкретные примеры) – 0 баллов.*

1. На координатной плоскости *xOy* укажите множество точек (*x*; *y*), координаты которых удовлетворяют неравенству $x^{2}>xy$.

***Первое решение.*** Заметим, что точки (0; *y*), лежащие на оси *Oy*, не удовлетворяют данному неравенству, а точки (*x*; 0), $x\ne 0$, лежащие на оси Ox, - удовлетворяют. Далее, рассмотрим точки каждой координатной четверти отдельно. В первой четверти координаты точек положительны: *x* > 0 и *y* > 0. Поэтому, после сокращения на *x*, получимравносильное неравенство $x>y$. Следовательно, в первой четверти неравенству $x^{2}>xy$ удовлетворяют все точки, лежащие под прямой $y=x$. Для точек второй и четвертой четвертей - $x<0, y>0 $ и $x>0, y<0$ – правая часть неравенства $xy<0$, а левая часть $x^{2}>0$. Следовательно, требуемому неравенству удовлетворяют все точки этих четвертей. В третьей четверти обе координаты всех точек отрицательны: $x<0, y<0$. Поэтому исходное неравенство, после сокращения на отрицательное *x*, будет равносильно неравенству $x<y$. Следовательно, в этой четверти нашему неравенству удовлетворяют все точки, лежащие над прямой *y = x*.

***Второе решение***. Перепишем наше неравенство: $x^{2}-xy>0 ⇔x\left(x-y\right)>0$. Последнее неравенство равносильно совокупности двух систем: $\left\{\begin{array}{c}x>0\\x>y\end{array}\right. и \left\{\begin{array}{c}x<0 \\x<y\end{array}\right.$. Первой системе удовлетворяют координаты всех точек справа от оси *Oy*, лежащие под прямой  *y = x*. Второй системе удовлетворяют координаты всех точек слева от оси *Oy*, лежащие над прямой  *y = x*.

*Примечание. Если указаны не все точки, удовлетворяющие данному неравенству, - минус 2-4 балла. Если наряду с верными точками указаны точки, не удовлетворяющие неравенству, - 1-2 балла.*

1. На двух смежных сторонах *AB* и *BC* параллелограмма *ABCD* вне его построены равносторонние треугольники *ABM* и *BCN* соответственно. Докажите, что треугольник *DMN* – равносторонний.

***Доказательство.*** Обозначим угол *BAD* параллелограмма через $α$. Треугольники *ADM*  и *DCN* равны по двум сторонам и углу между ними. Действительно, имеем $AM=AB=CD$, $AD=BC=CN$, а каждый из углов *DAM*  и *DCN*  равен $α+60^{0}$. Следовательно, *DM = DN*. Теперь покажем, что треугольник *BMN* равен треугольнику *ADM*  по тому же признаку. В самом деле, *AM = BM*, *AD = BC = BN*, и угол *MBN =*$360^{0}-60^{0}-60^{0}-(180^{0}-α)=60^{0}+α$*.* Таким образом, *MN = DM = DN*, т. е. треугольник *DMN* – равносторонний.

 *Примечание. Если доказано равенство двух сторон треугольника – 3 балла.*

1. Известно, что $a<1, b>2$. Докажите, что $2a^{2}-4ab+3b^{2}-2b>2$.

***Доказательство.*** Выполним преобразования: $2a^{2}-4ab+3b^{2}-2b=2a^{2}-4ab+2b^{2}+b^{2}-2b+1-1=2\left(b-a\right)^{2}+\left(b-1\right)^{2}-1$. Учитывая, что $b-a>2-1=1, b-1>1$ и что функция $f\left(x\right)=x^{2}$ при положительных *x* возрастающая, получим $2\left(b-a\right)^{2}+\left(b-1\right)^{2}-1>2∙1+1-1=2$.

*Примечание. Если в левую часть требуемого неравенства подставляются значения a = 1 и b = 2 – 0 баллов.*

1. В классе 30 учеников. Они сидят по двое за 15 партами так, что ровно половина всех девочек сидят с мальчиками. Докажите, что учеников класса не удастся пересадить так, чтобы ровно половина всех мальчиков сидели с девочками.

***Доказательство.*** Так как половина всех девочек сидит с мальчиками, то число девочек четно, а значит и число мальчиков четно. Далее, вторая половина девочек, которые не сидят с мальчиками, сидят друг с другом. Это значит, что они разбиты на пары, т. е. половина девочек тоже четное число. Следовательно, общее число девочек кратно 4. Но так как число 30 не кратно 4, то число мальчиков четно, но не кратно 4, а это значит, что если половина мальчиков будет сидеть с девочками, то вторую половину нельзя разбить на пары, чтобы они сидели друг с другом.

*Примечание. Доказано, что число мальчиков четно – 2 балла. Доказано, что число девочек кратно четырем – 4 балла.*

**9 класс**

1. Есть таблица $8×8$ и карточки с числами от 1 до 64. Двое игроков по очереди кладут по одной карточке на свободные клетки таблицы. Когда все карточки разложены, игроки отмечают в каждом столбце наименьшее число и находят сумму всех отмеченных чисел. Если эта сумма четна – выигрывает первый игрок, а если нечетна – второй. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

**Ответ:** у второго игрока.

***Решение***. Второй игрок должен мысленно разбить все карточки на пары (2, 3), (4, 5), . . . , (62, 63), (64, 1). И если первый игрок выкладывает карточку из какой-то пары, то второй игрок выкладывает в тот же столбец вторую карточку из этой же пары. В результате в каждом столбце будут выложены карточки из каких-то четырех пар и наименьшим в столбце окажется число, которое было наименьшим в одной из пар. Но наименьшие числа во всех парах, кроме (64, 1) – четные, а наименьшее число в «исключительной» паре – 1. Понятно, что 1 обязательно окажется отмеченным числом. Следовательно, в конце игры будет отмечено 7 четных чисел и одно нечетное, и второй игрок выиграет.

*Примечание. Не обоснованный ответ – 0 баллов.*

1. Ученик не заметил знака умножения между двумя трехзначными числами и написал одно шестизначное число, которое оказалось в семь раз больше их произведения. Найдите эти числа.

**Ответ:** 143, 143.

***Решение***. Пусть *x* и *y* – искомые трехзначные числа, тогда $7∙x∙y=1000x+y$. Поделив обе части на x, получим $7y=1000+^{y}/\_{x}$, где $^{y}/\_{x}$ – целое число в пределах от 1 до 9 (так как *y* и *x* трехзначные числа), поэтому $1001\leq 7y\leq 1009$, $143\leq y\leq 144$. Поскольку $x\geq 100$, то $^{y}/\_{x}=1$ и $7y=1001. Откуда y=143, x=143$.

*Примечание. Верный, но не обоснованный ответ – 2 балл.*

1. Точки *K* и *L* – середины сторон  *AB* и *BC* четырехугольника *ABCD*. На стороне *CD* выбрана такая точка *M*, что *CM* : *MD* = 2 : 1. Известно, что *DK* $‖ $*BM* и *AL* ‖*CD*. Докажите, что четырехугольник *ABCD* – трапеция.

***Доказательство.*** Проведем через точку *L* прямую параллельную *BM*,и пусть она пересекает отрезок *CM* в точке *N*. Так как L – середина *BC*, то,  *LN* – средняя линия треугольника *BCM*, значит *CN = NM*. По условию *CM* : *MD* = 2 : 1, следовательно $CN=NM=MD$. Обозначим через *E* и *F* точки пересечения прямой *AL* с прямыми *KD* и *BM* соответственно. *KE* – средняя линия в треугольнике *ABF*, поэтому *AE = EF*. Далее, из того, что *LN* ‖ *FM* ‖ *ED* и *NM = MD* следует, согласно теореме Фалеса, равенство *LF = FE*. Наконец, заметим, что четырехугольник *EFMD* –параллелограмм, поэтому *FE = MD*. Таким образом, *AL=* 3*EF =* 3*MD = CD* и *AL* ‖ *CD*. Следовательно, *ALCD* – параллелограмм, и *AD*‖*BC*. Учитывая, что *CD* ‖ *AL* ∦ *AB*, то четырехугольник *ABCD* – трапеция.

*Примечание. Замечено, что пересечении прямых AL, DC, KD и BM - параллелограмм – 1 балл.*

1. Известно, что $a+b+c>0; ab+ac+bc>0; abc>0$. Докажите, что $a>0$, $b>0, c>0$.

***Доказательство***. Допустим, что среди чисел $a, b, c$ есть отрицательные. Поскольку $abc>0$, то отрицательных чисел ровно два. Пусть, например, $a<0, b<0, c>0$ (другие случаи рассматриваются аналогично). Из второго неравенства получаем $ac+b\left(a+c\right)>0$. Но $ac<0 и b\left(a+c\right)<0$, поскольку из первого неравенства $a+c>-b>0$. Следовательно, $ac+b\left(a+c\right)<0$. Получили противоречие.

*Примечание. Рассмотрен как и в данном решении один случай – 7 баллов.*

1. Можно раскрасить грани куба либо все в белый цвет, либо все в черный цвет, либо часть граней в белый цвет, а оставшуюся часть – в черный. Сколько существует различных способов окраски граней куба, если различными считаются такие окраски кубов, которые не совмещаются вращением.

**Ответ:** 10.

***Решение***. Окраски граней куба естественно различаются по числу окрашенных граней в белый цвет. Очевидно, имеется ровно один вариант окраски всех граней куба в белый цвет, и один вариант, когда нет ни одной белой грани. Точно так же, очевидно, что имеется ровно один вариант окраски одной грани куба в белый цвет и один вариант окраски пяти граней в белый цвет (или одной грани в черный цвет). Далее, существуют ровно две различные окраски, когда две грани куба окрашены в белый цвет. Первый вариант, когда белые грани противоположные в кубе, второй, когда они смежные, т. е. имеют общее ребро. Любая окраска куба, состоящая из двух белых граней, совмещается вращением с одной из них. Действительно, совмещая белые грани двух таких кубов, окраски совпадут, если у них в белый цвет окрашены противоположные грани. Если у них белые грани имеют общее ребро, то вращая один из них вокруг оси, перпендикулярной совмещенным граням, добьемся совпадения двух других белых граней. Аналогично, имеется два варианта для четырех белых граней, или для двух черных граней. Наконец, покажем, что и в случае трех белых граней имеется лишь два различных варианта окраски. Действительно, разобьем все грани на три пары противоположны граней. Тогда окраски различаются, если все три грани из разных пар (и тогда они имеют общую вершину), или две грани из одной пары, а одна из другой (тогда третья грань смежная двум граням из одной пары). Итого имеется 1 + 1 + 2 +2 + 2 +1 + 1 = 10 различных окрасок граней куба.

*Примечание. Отмечено, что число различных окрасок не меньше* $7$ *-1 балл, не меньше 8 – 3 балла, не меньше 9 – 5 баллов.*

**10 класс**

1. Докажите, что $b^{2}>4ac$, если $(a+b+c)(a-b+c)<0$.

***Доказательство.*** ***Первое решение***. Если $a=0 и b=0$, то условие имеет вид $c^{2}<0$, что не верно. Следовательно, если $a=0, то b\ne 0$ и требуемое неравенство выполняется. Пусть $a\ne 0$. Рассмотрим квадратичную функцию $y=ax^{2}+bx+c$. Поскольку $y\left(1\right)=a+b+c, а y\left(-1\right)=a-b+c$, и, по условию, $y\left(1\right)∙y\left(-1\right)<0$, то в точках +1 и -1 функция принимает значения разного знака и отлична от нуля. Это означает, что квадратичная функция имеет два корня, необходимым и достаточным условием которого является положительность дискриминанта, то есть $b^{2}-4ac>0$, откуда и следует требуемое неравенство.

***Второе решение***. Из условия имеем

$\left(a+b+c\right)\left(a-b+c\right)=\left((a+c)+b\right)\left((a+c)-b\right)=(a+c)^{2}-b^{2}=a^{2}+2ac+c^{2}-b^{2}<0$. Или $b^{2}>a^{2}+c^{2}+2ac$. Согласно неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом $a^{2}+c^{2}\geq 2ac$, откуда $b^{2}>a^{2}+c^{2}+2ac>2ac+2ac=4ac$.

1. В десятичной записи некоторого натурального числа переставили цифры и получили число в три раза меньшее. Доказать, что исходное число делится на 27.

***Доказательство.*** Пусть *a* – исходное число, а число *b* получено из *a*  после перестановки некоторых цифр. По условию $a=3b$, то есть число *a* делится на 3. Так как сумма цифр у чисел *a* и *b* одинакова, то, по признаку делимости на 3, число *b* тоже делится на 3. Далее, раз число *b* делится на 3, а число *a* = 3*b*, то *a* делится на 9. Теперь согласно признаку делимости на 9, число *b* тоже делится на 9, а значит, число *a* делится на 27.

*Примечание. Доказано, что число a делится на 9, – 3 балла.*

1. В окружность радиуса 1 вписан правильный 2012-угольник. Найти сумму квадратов расстояний от произвольной точки окружности до всех вершин этого многоугольника.

**Ответ:** 4024.

***Решение.*** Так как число вершин правильного 2012-угольника четно, то они разбиваются на 1006 пар диаметрально противоположных вершин. Пусть *AB* некоторый диаметр, а *M* – произвольная точка окружности. Если *M* совпадает с одной из вершин *A* или *B*, то $MA^{2}+MB^{2}=0+4=4$. Если точка *M* отлична и от *A* и от *B*, то треугольник *MAB* прямоугольный (угол *AMB* – вписанный и опирается на диаметр) с гипотенузой *AB =* 2. Тогда, по теореме Пифагора, $MA^{2}+MB^{2}=AB^{2}=4$. Следовательно, независимо от выбора точки *M*, сумма квадратов расстояний от нее до вершин каждой пары диаметрально противоположных вершин постоянна и равна 4. Следовательно, сумма квадратов расстояний от точки *M* до вершин правильного 2012-угольника будет равна $4×1006=4024$.

*Примечание. Если не рассмотрен случай совпадения точки с вершиной многоугольника – минус 1 балл.*

1. Сумма первых *n* членов арифметической прогрессии равна сумме первых *m*  членов той же прогрессии. Определите сумму первых $n+m$ членов этой же прогрессии.

**Ответ:** 0.

***Решение.*** Обозначим через $a\_{1}$- первый член прогрессии, а *d* – разность прогрессии. По условию задачи $S\_{n}=S\_{m}$, то есть справедливо равенство $\frac{2a\_{1}+\left(n-1\right)d}{2}∙n=\frac{2a\_{1}+\left(m-1\right)d}{2}∙m$, из которого, учитывая, что $n\ne m$, получаем $2a\_{1}=-d(m+n-1)$. Подставляя полученное выражение для $2a\_{1}$ в формулу суммы первых $n+m$ членов той же прогрессии, получим $S\_{n+m}=\frac{2a\_{1}+\left(m+n-1\right)d}{2}∙\left(n+m\right)=0$.

*Примечание. Верный ответ без обоснования – 1 балл.*

1. В шахматном однокруговом турнире, где каждый участник играет с каждым другим один раз, участвовало два девятиклассника и некоторое число десятиклассников. Два девятиклассника вместе набрали 8 очков, а каждый десятиклассник набрал одно и то же число очков. Сколько десятиклассников участвовало в турнире? (За победу в шахматной партии дается одно очко, за ничью – пол очка, за поражение – ноль очков).

**Ответ.** 7 или 14.

***Решение***. Пусть в турнире участвовало n десятиклассников. Так как в каждой партии всего разыгрывается одно очко, то девятиклассники в игре между собой вместе набрали 1 очко, и, следовательно, 7 очков набрали в играх с десятиклассниками. Тогда все десятиклассники суммарно набрали $\frac{n(n-1)}{2}$ очков в играх между собой и 2*n –* 7 очков в играх с двумя девятиклассниками. По условию, все десятиклассники набрали одинаковое число очков, то есть, число $\frac{n(n-1)}{2}+2n-7$ кратно *n*. Последнее означает, что число $\frac{n-1}{2}-\frac{7}{n}$ целое. Если *n* нечетно, то (*n –* 1) – четно, и, следовательно, *n делит* 7, то есть  *n* = 1 или *n =* 7. Значение *n* = 1 не подходит, так как общее число набранных очков десятиклассниками будет отрицательно. Пусть *n* четно, то есть  *n* = 2к. Тогда $\frac{n-1}{2}-\frac{7}{n}$ =$ k-\frac{1}{2}-\frac{7}{2k}$. Следовательно, $\frac{1}{2}+\frac{7}{2k}$ целое, а значит $\frac{7}{2k}=m+\frac{1}{2}$, откуда *k* = 1 или *k =* 7. Действительно, при *k* > 7 $\frac{7}{2k}<\frac{1}{2}$, а значения *k* $\leq 7$ проверяются непосредственно. Значение *k* = 1 не подходит по тем же причинам, что и в первом случае. Таким образом, для  *n* имеем два значения: 7 и 14. Проверкой легко убедиться, что оба значения подходят.

*Примечание. Получен один ответ – 5 баллов.*

**11 класс**

1. Какое наибольшее значение может принимать сумма косинусов всех углов равнобедренного треугольника?

**Ответ**: 3/2.

***Решение***. Пусть углы при основании треугольника равны $α$, тогда угол при вершине равен $180^{0}-2α$. Найдем сумму косинусов этих углов: $2\cos(α)+\cos(\left(180^{0}-2α\right)=2\cos(α-\cos(2α=2\cos(α-2cos^{2}α+1))))$. Выполнив замену $\cos(α=t)$, получим квадратичную функцию $y=-2t^{2}+2t+1$, которая достигает своего наибольшего значения при $t=1/2$. Заметим, что $\cos(α)$ принимает значение $1/2$ при $α=60^{0}$. Таким образом, максимальное значение суммы косинусов углов достигается в равностороннем треугольнике и равно $3/2$.

*Примечание. Верный ответ без обоснования – 1 балл.*

1. Квадратичная функция $f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c$ такова, что если заменить в правой части любой из коэффициентов *a, b* илиc на 1, то получим квадратичную функцию, имеющую хотя бы один действительный корень. Докажите, что исходная функция $f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c$ принимает хотя бы в одной точке отрицательное значение.

***Решение***. Из условия следует, что $a\ne 0$, иначе функция $f(x)$ не является квадратичной. Если $a<0$, то, очевидно, найдутся значения *x*, в которых $f\left(x\right)<0$. Пусть $a>0$. Для доказательства утверждения, в этом случае, нам достаточно показать, что дискриминант $D=b^{2}-4ac$ квадратичного уравнения $ax^{2}+bx+c=0$ положителен, или, что $b^{2}>4ac$. По условию, каждое из уравнений $x^{2}+bx+c=0, ax^{2}+x+c=0 и ax^{2}+b+1=0$ имеет хоты бы один корень. Следовательно, в каждом из них дискриминант не отрицателен, то есть $b^{2}\geq 4c, 1\geq 4ac, b^{2}\geq 4a>0$. Из последнего неравенства следует, что $b\ne 0$. Если $c\leq 0$, а значит $ac\leq 0$, то $b^{2}>0\geq 4ac$. Пусть $c>0$.

*Первый способ*. Перемножая все три неравенства, получим $b^{4}\geq 16ac$. Заметим, что равенство здесь возможно только в случае, когда во всех трех неравенствах имеет место равенство. Но тогда $a=c=\frac{1}{2}, b=\sqrt{2}$ и неравенство $b^{2}>4ac$ выполняется. Если хотя бы в одном из неравенств имеет место строгое неравенство, то $b^{4}>16ac$, и, учитывая, что $ac>0$, извлекая корень квадратный из обеих частей, получим $b^{2}>4ac$.

*Второй способ*. Если $\left|b\right|>1$, то из второго неравенства имеем $b^{2}>1\geq 4ac$. Если $0<|b|\leq 1$, то, перемножая первое и третье неравенства, имеем $b^{4}\geq 16ac$, откуда, учитывая, что при $|b|\leq 1$, $b^{2}\geq b^{4}$, получаем $b^{2}\geq b^{4}>16ac>4ac$.

*Примечание. За каждый не рассмотренный случай – минус 1 балл.*

1. У натурального числа нашли все его натуральные делители, кроме самого числа, и сложили два наибольших из них. Получилось число 61. Найдите все такие натуральные числа.

**Ответ**: 118.

***Решение***. Пусть *a* и *b*, *a* > *b*, наибольшие делители числа *n.* По условию, $a+b=61$. Так как число 61 нечетное, то один из делителей четен, а значит и само число *n* четно. Поскольку число 61 простое, то числа *a* и *b* – взаимно простые. Если $a>2, и b>2$, то они не могут быть двумя наибольшими делителями числа *n*,поскольку $n\vdots (^{ab}/\_{2})$ и при этом $^{ab}/\_{2}>a>b$. Значит *b* = 2 (случай *a* = 2, очевидно, не возможен). Таким образом, *a =* 59 и $n\vdots (2∙59)$. Других делителей у числа *n* быть не может, поскольку все они должны быть меньше 2. Следовательно, $n=2∙59=118$.

*Примечание. За верный не обоснованный ответ – 2 балла.*

1. В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* точки *K, L, M, N* - середины ребер *AD, AS, BS* и *CD* соответственно. Найти объем тетраэдра *KLMN*, если объем пирамиды *SABCD* равняется 32.

**Ответ:** 2.

***Решение***. Можно воспользоваться координатным методом. В качестве линейных параметров удобно взять длину ребра основания и высоту пирамиды, а начало прямоугольной системы координат поместить в центре основания пирамиды с естественным направлением осей, найти координаты точек и т. д.. Имеется другой путь. Будем «двигать» вершины тетраэдра вдоль ребер пирамиды и следить за изменениями объема. Первой сдвигаем вершину *N* в вершину *D*. Так как прямые *CD* и *LM*  параллельны (каждая из них параллельна прямой *AB*), то прямая *CD* параллельна плоскости *KLM*, а значит, расстояние от точки  *N* до плоскости *KLM* равно расстоянию от точки *D* до этой же плоскости. Следовательно, $V\_{KLMN}=V\_{KLMD}$. Далее сдвигаем вершину *K* в точку *A*. Так как точка *K* – середина отрезка *AD*, то площадь треугольника  *ALD* в два раза больше площади треугольника *KLD*. Следовательно $V\_{KLMD}=\frac{1}{2}V\_{ALDM}$. Аналогично, если теперь вершину *L* мы передвинем в точку *S*, то объем пирамиды *ALDM* будет равен половине объема пирамиды *ASDM*, то есть $V\_{ALDM}=\frac{1}{2}V\_{ASDM}$. Наконец, сдвигая вершину *M* в точку *B*, мы еще раз увеличим в два раза объем предыдущей пирамиды, так как расстояние от точки *B* до плоскости *ASD* в два раза больше расстояния от точки *M*  до этой плоскости. Таким образом, имеем $V\_{KLMN}=V\_{KLMD}=\frac{1}{2}V\_{ALDM}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}V\_{ASDM}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}V\_{ASDB}\right)=\frac{1}{8}V\_{SABD}$. Но объем пирамиды *SABD*, очевидно равен половине объема данной пирамиды *SABCD*. Таким образом, $V\_{KLMN}=\frac{1}{8}16=2$.

*Примечание. При решении координатным методом: если верно определены координаты точек, и верно найдено уравнение одной из плоскостей тетраэдра KLMN – 3 балла, найдена площадь грани тетраэдра – плюс 2 балла. При решении методом «движения» вершин: за каждый не верно обоснованный переход – минус 1 балл.*

1. Рассматриваются все возможные шестизначные натуральные числа, в записи которых встречаются только цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6. Определите, сколько среди них таких чисел, которые делятся на 6.

**Ответ**: $6^{5}=7776$.

***Решение***. Натуральное число делится на шесть тогда и только тогда, когда оно делится и на два и на три. Отсюда следует, что все искомые числа должны оканчиваться четной цифрой, и иметь сумму цифр кратную трем. Первому условию удовлетворяют три цифры: 2, 4 и 6. Покажем, что для выполнения второго условия последней цифрой может быть только одна из них. Действительно, пусть *S* – сумма первых пяти цифр, записанных с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и кратного 6. Если *S* кратна трем, то в качестве последней цифры можем выбрать только одну цифру, а именно цифру 6, чтобы сумма всех цифр делилась на три. Другие цифры – 2 и 4 – не подходят, так как сумма цифр числа не будет кратна 3. Если *S* при делении на 3 дает остаток 1, то в качестве последней цифры можно взять только 2. Наконец, если  *S* при делении на 3 дает остаток 2, то последней цифрой может быть только цифра 4. Следовательно, число шестизначных натуральных чисел, записанных с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и кратных шести ровно столько же, сколько имеется пятизначных натуральных чисел, записанных теми же цифрами, то есть $6^{5}$.

*Примечание. Получен верный, но не обоснованный ответ – 2 балла.*