К новой официальной версии

# ЕГЭ 2019

Ю. В. Садовничий

# МАТЕМАТИКА

## ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

## ПЛАНИМЕТРИЯ

100 БАЛЛОВ

эффективный тренинг

- Различные способы решения задач
- Разбор решений примеров
- Ответы к задачам для самостоятельного решения

Издательство ЭКЗАМЕН®

Ю. В. Садовничий

ЕГЭ 100 БАЛЛОВ

# МАТЕМАТИКА

# ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

## ПЛАНИМЕТРИЯ

*Различные способы решения задач*
*Разбор решений примеров*
*Ответы к задачам*
*для самостоятельного решения*

*Издательство*
*«ЭКЗАМЕН»*
МОСКВА, 2019

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
С14
**Садовничий Ю. В.**
С14 ЕГЭ 2019. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Планиметрия / Ю. В. Садовничий. — М.: Издательство «Экзамен», 2019. — 144 с. (Серия «ЕГЭ. 100 баллов»)
ISBN 978-5-377-13613-2

Данная книга посвящена задачам ЕГЭ по математике (задачи по планиметрии). Рассматриваются различные методы решения таких задач, также большое внимание уделяется графическим иллюстрациям. Книга будет полезна учащимся старших классов, учителям математики, репетиторам.

Приказом № 699 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

**УДК 372.8:51**
**ББК 74.262.21**

*Справочное издание*

**Садовничий Юрий Викторович**

**ЕГЭ 100 БАЛЛОВ**
**МАТЕМАТИКА**
**ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ**
**ПЛАНИМЕТРИЯ**

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***
Гигиенический сертификат № РОСС RU.АД44.Н02841 от 30.06.2017 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо,* редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова,* корректоры *Е. В. Григорьева*, *И. А. Огнева*
Дизайн обложки *Л. В. Демьянова,* компьютерная верстка *М. А. Серова*

Россия, 107045, Москва, Луков пер., д. 8. www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 8 (495) 641-00-30 (многоканальный)

Формат 60x90/16. Гарнитура «Таймс». Бумага газетная. Уч.-изд. л. 4,8.
Усл. печ. л. 9. Тираж 5000 экз. Заказ № 5042.

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в филиале «Тверской полиграфический комбинат детской литературы»
ОАО «Издательство «Высшая школа». 170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, д. 46.
Тел.: +7 (4822) 44-85-98. Факс: +7 (4822) 44-61-51

**ISBN 978-5-377-13613-2**

# СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Данная книга посвящена задачам, аналогичным задаче 16 ЕГЭ по математике (задача по планиметрии). Наряду с задачами 18 (задача с параметром) и 19 (задача, при решении которой используются свойства целых чисел) задача 16 является наиболее сложной в варианте. Это объясняется, в первую очередь, отсутствием у задач по планиметрии алгоритмических решений. Кроме того, сложности могут возникнуть уже при построении чертежа. В примере 5 параграфа 9 показано, как правильный чертеж может дать ключ к решению задачи. В настоящей книге рассматриваются различные методы решения планиметрических задач.

В первых трех параграфах представлены задачи, связанные с вычислением в треугольниках. Кроме общеизвестных теорем (теорема синусов и теорема косинусов) приводятся различные формулы для вычисления длин биссектрисы и медианы.

Параграфы 4 и 5 посвящены подобию треугольников и отношению площадей. Ключевую роль здесь играет теорема Менелая и так называемые «леммы о площадях». Такие задачи уже содержат меньше вычислений по сравнению с задачами первых трех параграфов.

И все же наиболее геометрические задачи содержатся в параграфах 6 и 7. В параграфе 6 собраны задачи, связанные с углами в окружности (вписанные углы, угол между касательной и хордой и т.д.), в параграфе 7 сделан акцент на касание окружности и прямой, а также касание окружностей.

Последние два параграфа называются «Длины и площади, связанные с окружностью» и «Четырехугольники». Кроме этого в конце книги доказаны некоторые из теорем и формул, сформулированных в начале каждого параграфа.

Каждый параграф книги содержит теоретический материал, несколько разобранных примеров, в которых демонстрируются различные методы решения задач по данной теме, а также задачи для самостоятельного решения, снабженные ответами.

Автор надеется, что данная книга будет полезна учащимся старших классов для самостоятельной подготовки к ЕГЭ, а также учителям математики, репетиторам и всем тем, кто интересуется геометрией.

*Желаем успехов!*

# § 1. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

В треугольнике $ABC$ через $a$, $b$ и $c$ мы будем обозначать стороны $BC$, $CA$ и $AB$ соответственно, а противолежащие этим сторонам углы — через $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. Высоту, выходящую из точки $A$, обозначим $h_a$, медиану — $m_a$, а биссектрису — $l_a$. Кроме того, через $R$ обозначается радиус описанной около треугольника, а через $r$ — радиус вписанной в треугольник окружности. Площадь треугольника обозначается буквой $S$, а полупериметр — буквой $p$. Приведем некоторые теоремы и формулы (будем считать, что $c$ — гипотенуза треугольника):

**Теорема 1.** (Теорема Пифагора). В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, т.е. $c^2 = a^2 + b^2$.

**Теорема 2.** В прямоугольном треугольнике справедливы следующие соотношения:

$$a = c\cos\beta = c\sin\alpha = b\operatorname{tg}\alpha = b\operatorname{ctg}\beta, \qquad c = \frac{a}{\cos\beta} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

**Теорема 3.** Если в прямоугольном треугольнике через $c_a$ и $c_b$ обозначить проекции катетов на гипотенузу, то справедливы следующие соотношения:

$$h^2 = c_a \cdot c_b, \qquad a^2 = c \cdot c_a, \qquad b^2 = c \cdot c_b.$$

**Теорема 4.** Площадь прямоугольного треугольника равна

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c.$$

**Теорема 5.** Центр описанной около прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы, а радиус этой окружности равен половине гипотенузы. Отсюда следует, что медиана треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

**Теорема 6.** Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен отношению площади к полупериметру, т.е.

$$r = \frac{S}{p} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{a+b-c}{2},$$

так как $(a+b+c)(a+b-c) = (a+b)^2 - c^2 = 2ab$.

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Биссектриса прямого угла треугольника равна катету. Вычислить ее длину, если длина другого катета равна $a$.

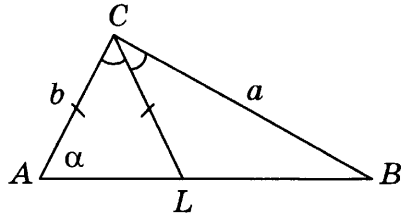


Рис. 1

*Решение.* Пусть $C$ — вершина прямого угла треугольника $ABC$, $CL$ — биссектриса, $AC = CL$, $BC = a$. Треугольник $ACL$ равнобедренный, поэтому $\angle CAL = \angle CLA$ (рисунок 1). Так как $CL$ — биссектриса прямого угла $C$, то $\angle ACL = 45°$. Зная, что сумма углов треугольника равна 180°, находим $\alpha = \angle CAL = \frac{180° - 45°}{2} = 67{,}5°$. Далее, согласно теореме 2, $AC = b = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha$, поэтому $CL = AC = a \cdot \operatorname{ctg} 67{,}5°$.

Ответ: $a \cdot \operatorname{ctg} 67{,}5°$.

**Пример 2.** В треугольнике, один из углов которого равен разности двух других, длина меньшей стороны равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, в два раза больше площади описанного около треугольника круга. Найти длину большей стороны треугольника.

*Решение.* Докажем, что данный в условии задачи треугольник — прямоугольный. Обозначим через $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ углы

этого треугольника ($\gamma$ — наибольший угол). Имеем: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ и $\alpha = \gamma - \beta$, откуда $(\gamma - \beta) + \beta + \gamma = 180°$ и $\gamma = 90°$.

Пусть $c$ — гипотенуза данного треугольника. Тогда больший его катет равен $\sqrt{c^2 - 1}$. Так как радиус описанной около прямоугольного треугольника окружности равен половине гипотенузы, согласно условию задачи получаем:

$$c^2 + (c^2 - 1) = 2\pi \cdot \frac{c^2}{4} \Leftrightarrow 4c^2 - 2 = \pi c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{2}{4 - \pi}}.$$

Проверим, что сторона треугольника, которая имеет длину 1, является наименьшей. Имеем:

$$c^2 = \frac{2}{4 - \pi} > 2 \Rightarrow c^2 - 1 > 1 \Rightarrow \sqrt{c^2 - 1} > 1,$$

что и требовалось доказать.

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{4 - \pi}}$.

**Пример 3.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ биссектриса $BE$ прямого угла $B$ делится центром $O$ вписанной окружности в отношении $BO : OE = \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Найти острые углы треугольника.

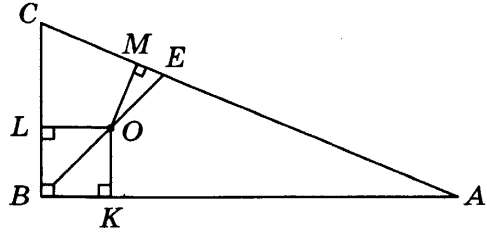


Рис. 2

*Решение.* Можно считать, что $BO = \sqrt{3}$, $OE = \sqrt{2}$, угол $A$ — меньший угол треугольника. Пусть вписанная окружность касается сторон $AB$, $BC$ и $AC$ соответственно в точках $K$, $L$, $M$. Проведем радиусы в точки касания (рисунок 2). Так как $BLOK$ — квадрат, то $r = OL = OK = OM = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Из прямоугольного треугольника $OME$ находим, что $\sin\angle OEM =$

$= \frac{OM}{OE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $\angle OEM = 60°$. Поскольку $\angle CBE = 45°$, то $\angle C = 180° - 60° - 45° = 75°$, а $\angle A = 15°$.

Ответ: 75° и 15°.

**Пример 4.** Проекции катетов на гипотенузу прямоугольного треугольника имеют длины $x$ и $y$. Найти площадь треугольника.

*Решение.* Согласно теореме 3 имеем $h^2 = xy$, где $h$ — высота, опущенная на гипотенузу, откуда $h = \sqrt{xy}$. Очевидно, что длина гипотенузы равна $x + y$, поэтому площадь треугольника будет равна $S = \frac{1}{2}(x + y)\sqrt{xy}$.

Ответ: $\frac{1}{2}(x + y)\sqrt{xy}$.

**Пример 5.** В прямоугольном треугольнике $DEF$ на гипотенузу опущены медиана $DM$ и высота $DQ$. Известно, что $DM = \frac{\sqrt{17}}{2}$ и $\sin \angle DMQ = \frac{8}{17}$. Найти катеты треугольника $DEF$.

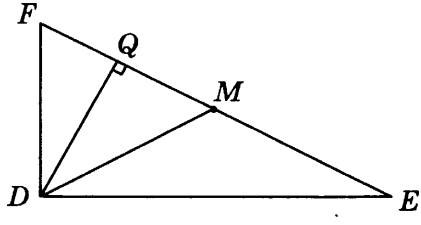


Рис. 3

*Решение.* Пусть точка $Q$ лежит между точками $M$ и $F$ (рисунок 3). Из прямоугольного треугольника $DMQ$ находим, что $DQ = DM \cdot \sin \angle DMQ = \frac{4}{\sqrt{17}}$. Так как медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы, то $EF = \sqrt{17}$. Тогда $S_{\Delta DEF} = \frac{1}{2} EF \cdot DQ = 2$. Пусть $DE = x$ и $DF = y$. Имеем:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}xy = 2, \\ x^2 + y^2 = 17. \end{cases}$$

В нашем случае $DE = x = 4$ и $DF = y = 1$. Если же точка $Q$ лежит между точками $E$ и $M$, то тогда $DE = 1$ и $DF = 4$.

Ответ: $DE = 1$, $DF = 4$, или $DE = 4$, $DF = 1$.

**Пример 6.** Доказать, что для любого прямоугольного треугольника справедливо неравенство $R + r \geq \sqrt{2S}$, где $R$ и $r$ — радиусы описанной и вписанной окружностей, $S$ — его площадь.

*Решение.* Согласно теоремам 5 и 6 имеем $c = 2R$ и $r = \frac{a+b-c}{2}$, откуда $R + r = \frac{a+b}{2}$. Здесь $c$ — гипотенуза, а $a$ и $b$ — катеты прямоугольного треугольника. Далее $R + r = \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, так как среднее арифметическое двух положительных чисел всегда больше либо равно их среднему геометрическому. Но $\sqrt{ab} = \sqrt{2S}$, так как $S = \frac{1}{2}ab$. Следовательно, $R + r \geq \sqrt{2S}$, что и требовалось доказать.

**Пример 7.** В трапеции $KLMN$ с основаниями $LM$ и $KN$ биссектриса $LA$ угла $KLM$ делит отрезок $MN$ на равные части, $MA = AN$. Известно, что средняя линия трапеции равна $\sqrt{5}$, $KA = 4$. Найти длину отрезка $LA$.

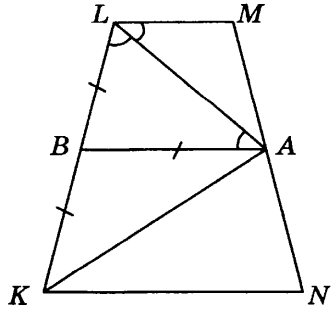


Рис. 4

*Решение.* Пусть $AB$ — средняя линия трапеции $KLMN$ (рисунок 4). Угол $ALM$ равен углу $LAB$ (как накрест лежащие), поэтому $\angle LAB = \angle ALB$ и треугольник $ABL$ — равнобедренный. Это означает, что $LB = BK = \sqrt{5}$. Следовательно, если на отрезке $KL$ как на диаметре построить окружность, то точка $A$ будет лежать на этой окружности. Поэтому треугольник $KAL$ прямоугольный и $LA = \sqrt{KL^2 - KA^2} = 2$.

Ответ: 2.

**Пример 8.** Вершина $M$ прямого угла в треугольнике $LMN$ лежит внутри окружности с центром $O$ и радиусом 8, проходящим через конец гипотенузы $LN$, $MH$ — высота треугольника $LMN$. На прямой $LN$ взята точка $K$ так, что $KH = OH$. Найти $MK$.

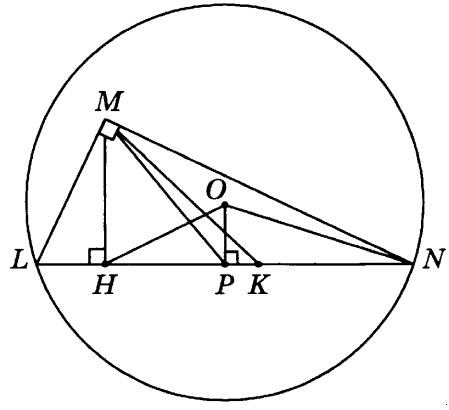


Рис. 5

*Решение.* Опустим перпендикуляр $OP$ из точки $O$ на прямую $LN$ (рисунок 5). Тогда $P$ — середина $LN$ и $LP = PN = MP$. Имеем:

$$MK^2 = MH^2 + KH^2 = (\text{так как } KH = OH) = MH^2 + OH^2 =$$

$$= MH^2 + PH^2 + PO^2 = MP^2 + PO^2 = (\text{так как } MP = PN) =$$

$$= PN^2 + PO^2 = ON^2.$$

Поскольку $ON$ — радиус окружности, то $MK = ON = 8$.

Ответ: 8.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**1.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ из вершины $B$ прямого угла опущена высота $BD$ на гипотенузу $AC$. Известно, что $AB = 13$, $BD = 12$. Найти площадь треугольника $ABC$.

**2.** В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания с окружностью делят гипотенузу на отрезки 5 и 12. Найти площадь треугольника.

**3.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ угол $A$ прямой, величина угла $B$ равна 30°, а радиус вписанной окружности равен $\sqrt{3}$. Найти расстояние от вершины $C$ до точки касания вписанной окружности и катета $AB$.

**4.** Гипотенуза $AB$ прямоугольного треугольника $ABC$ является хордой окружности радиуса 10. Вершина $C$ лежит на диаметре окружности, который параллелен гипотенузе. Угол $CAB$ составляет 75°. Найти площадь треугольника $ABC$.

**5.** В прямоугольном треугольнике величина острого угла равна $\alpha$, а радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен $R$. Найти длину высоты треугольника, опущенной на гипотенузу.

**6.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ из вершины прямого угла $C$ проведены медиана $CM$ и высота $CH$. Найти $AH : AM$, если $CM : CH = 5 : 4$ и точка $H$ находится между точками $A$ и $M$.

**7.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ точки $D$ и $E$ лежат соответственно на катетах $BC$ и $AC$ так, что $CD = CE = 1$. Точка $O$ есть точка пересечения отрезков $AD$ и $BE$. Площадь треугольника $BOD$ больше площади треугольника $AOE$ на 0,5. Кроме того, известно, что $AD = \sqrt{10}$. Найти длину гипотенузы $AB$.

**8.** Найти острые углы в прямоугольном треугольнике, в котором отношение гипотенузы к высоте, опущенной из вершины прямого угла, равно $4/\sqrt{3}$.

**9.** Катеты прямоугольного треугольника равны 36 и 48. Найти расстояние от центра вписанной в треугольник окружности до высоты, проведенной к гипотенузе.

**10.** Какие из значений: 2, 12/5, 5/2 может принимать в прямоугольном треугольнике отношение радиуса его описанной окружности к радиусу его вписанной окружности?

**11.** Центр описанной около треугольника окружности лежит на одной из сторон этого треугольника, а длины сторон этого треугольника образуют геометрическую прогрессию. Найти тангенс наименьшего угла этого треугольника.

**12.** Найти площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, катеты которого являются корнями уравнения $2x^2 - 6x + 1 = 0$.

# § 2. ТЕОРЕМЫ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ, ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

В этом параграфе сформулируем две теоремы, которые наиболее часто применяются при решении треугольников. Все обозначения стандартные, приведены в начале предыдущего параграфа.

**Теорема 1.** (Теорема косинусов.) В произвольном треугольнике справедливо соотношение

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

**Теорема 2.** (Теорема синусов.) В произвольном треугольнике справедливы соотношения

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

**Теорема 3.** Площадь произвольного треугольника можно вычислить по одной из следующих формул:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Последняя формула называется формулой Герона.

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** В треугольнике $ABC$ биссектриса $AK$ перпендикулярна медиане $BM$, а угол $ABC$ равен 120°. Найти отношение площади треугольника $ABC$ к площади описанного около этого треугольника круга.

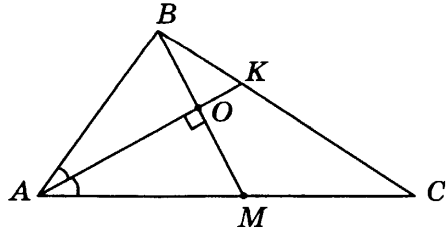


Рис. 6

*Решение.* Пусть биссектриса $AK$ пересекает медиану $BM$ в точке $O$. В треугольнике $ABM$ отрезок $AO$ является и биссектрисой, и высотой, поэтому треугольник $ABM$ — равнобедренный: $AB = AM = MC$ (рисунок 6). Можно считать, что $AB = 1$, $AC = 2$, $BC = x$. Применим к треугольнику $ABC$ теорему косинусов. Имеем:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 = 1 + x^2 - 2x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{13}-1}{2}.$$

Тогда площадь треугольника $ABC$ равна $S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{13}-1)}{8}$, радиус описанной около этого треугольника окружности равен $R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, площадь круга равна $S_1 = \pi R^2 = \frac{4\pi}{3}$.

Следовательно, искомое отношение равно $\frac{S}{S_1} = \frac{3\sqrt{3}(\sqrt{13}-1)}{32\pi}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}(\sqrt{13}-1)}{32\pi}$.

**Пример 2.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ с прямым углом $C$, углом $B$, равным 30°, и катетом $CA = 1$ проведена медиана $CD$. Кроме того, из точки $D$ под углом 15° к гипотенузе проведена прямая, пересекающая отрезок $BC$ в точке $F$. Найти площадь треугольника $CDF$.

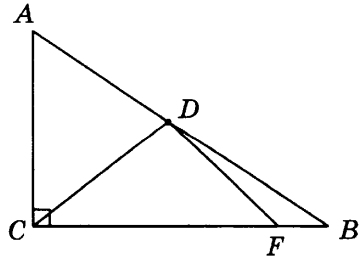


Рис. 7

*Решение.* Рассмотрим треугольник $ABC$. В нем $AB = \dfrac{AC}{\sin\angle ABC} = 2AC = 2$, значит, $BD = CD = 1$ (рисунок 7). Кроме того, $\angle BFD = 180° - 30° - 15° = 135°$. Применим теперь к треугольнику $BDF$ теорему синусов. Имеем:

$$\frac{BD}{\sin\angle BFD} = \frac{DF}{\sin\angle DBF} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin 135°} = \frac{DF}{\sin 30°} \Leftrightarrow DF = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Далее, так как треугольник $CDB$ равнобедренный, получаем, что:

$$\angle DCB = \angle DBC = 30° \Rightarrow \angle CDB = 120° \Rightarrow \angle CDF = 105°.$$

Значит, $S_{\Delta CDF} = \dfrac{1}{2} CD \cdot DF \cdot \sin\angle CDF = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sin 105°$. Найдем значение $\sin 105°$:

$$\sin 105° = \cos 15° = \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Таким образом, площадь треугольника $CDF$ равна $S = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{8}$.

Ответ: $\dfrac{1+\sqrt{3}}{8}$.

**Пример 3.** В треугольник $ABC$ с длиной стороны $BC$, равной 9, вписана окружность, касающаяся стороны $BC$ в точке $D$. Известно, что $AD = DC$ и косинус угла $BCA$ равен 2/3. Найти длину стороны $AC$.

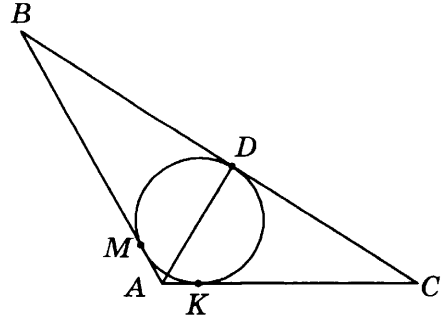


Рис. 8

*Решение.* Пусть $K$ и $M$ — точки касания вписанной окружности со сторонами $AC$ и $AB$ соответственно. Пусть $KC = x$, тогда $AD = CD = x$, $BD = BM = 9 - x$ (так как отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны). Пусть $AM = y$, тогда и $AK = y$ (рисунок 8). Применив теорему косинусов к треугольнику $ADC$, получим:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos \angle ACD \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = (x+y)^2 + x^2 - 2(x+y)x \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left(x + y - \frac{4}{3}x\right) = 0 \Leftrightarrow x = 3y.$$

Применим теперь теорему косинусов к треугольнику $ABC$. Имеем:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle ACB \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (9 - 3y + y)^2 = (4y)^2 + 9^2 - 2 \cdot 4y \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 81 - 36y + 4y^2 = 16y^2 + 81 - 48y \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 3.$$

Следовательно, $AC = x + y = 4$.

Ответ: 4.

**Пример 4.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ длина катета $AB$ равна 4, а длина катета $AC$ равна 3. Точка $D$ делит гипотенузу $BC$ пополам. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники $ABD$ и $ADC$.

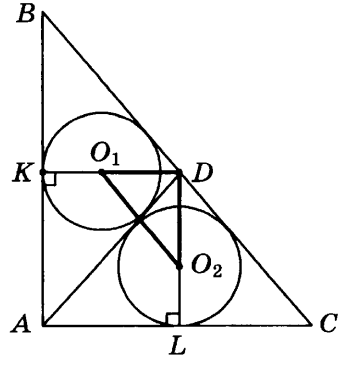


Рис. 9

*Решение.* Пусть $O_1$, $O_2$ — центры и $r_1$, $r_2$ — радиусы окружностей, вписанных в треугольники $ABD$ и $ADC$ соответственно. Пусть $K$ и $L$ — основания перпендикуляров, опущенных из точки $D$ на прямые $AB$ и $AC$. Точки $O_1$ и $O_2$ лежат соответственно на отрезках $DK$ и $DL$, так как треугольники $ABD$ и $ADC$ — равнобедренные (рисунок 9). Кроме того, $\angle O_1DO_2 = \frac{1}{2}\angle ADB + \frac{1}{2}\angle ADC = \frac{\pi}{2}$.

Так как медиана делит треугольник на два равных по площади треугольника, то

$$S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} = 3.$$

Справедливы равенства

$$AD = BD = CD = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \frac{5}{2}.$$

Вычислим радиусы $r_1$, $r_2$:

$$r_1 = \frac{2S_{\Delta ABD}}{AB + BD + AD} = \frac{2}{3}, \quad r_2 = \frac{2S_{\Delta ADC}}{AD + DC + AC} = \frac{3}{4}.$$

Так как $DK$ и $DL$ — средние линии треугольника $ABC$, то $DK = \frac{AC}{2} = \frac{3}{2}$, $DL = \frac{AB}{2} = 2$. Далее $DO_1 = DK - r_1 = \frac{5}{6}$, $DO_2 = DL - r_2 = \frac{5}{4}$. Наконец, применив к треугольнику $O_1DO_2$ теорему Пифагора, получим:

$$O_1O_2 = \sqrt{DO_1^2 + DO_2^2} = \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{25}{16}} = \frac{5\sqrt{13}}{12}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{13}}{12}$.

**Пример 5.** В равнобедренном треугольнике медиана к боковой стороне имеет длину $l$ и образует с основанием угол $\beta$. Найти площадь треугольника.

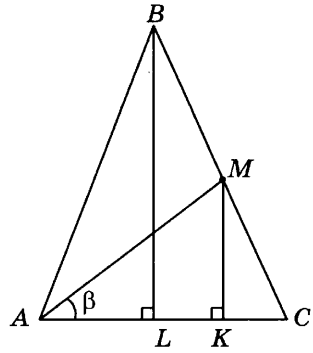


Рис. 10

*Решение.* Обозначим вершины данного треугольника через $A$, $B$ и $C$ так, что $AB = BC$ (рисунок 10). Обозначим через $AM$ медиану, проведенную к стороне $BC$, и опустим из точек $B$ и $M$ на прямую $AC$ перпендикуляры $BL$ и $MK$. Ясно, что $L$ — середина $AC$, а $K$ — середина $LC$. Поэтому $AK = \frac{3}{4}AC = l\cos\beta$, откуда $AC = \frac{4l\cos\beta}{3}$. Из прямоугольного треугольника $AMK$ найдем, что $MK = l\sin\beta$, следовательно, $BL = 2l\sin\beta$. Значит, искомая площадь равна

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BL = \frac{1}{2} \cdot \frac{4l\cos\beta}{3} \cdot 2l\sin\beta = \frac{2l^2\sin 2\beta}{3}.$$

Ответ: $\frac{2l^2 \sin 2\beta}{3}$.

**Пример 6.** Внутри треугольника $ABC$ взята точка $K$. Известно, что $AK = 1$, $KC = \sqrt{3}$, а величины углов $AKC$, $ABK$ и $KBC$ равны 120°, 15° и 15° соответственно. Найти длину отрезка $BK$.

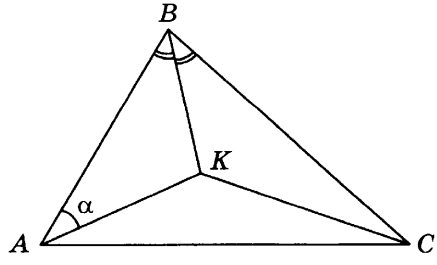


Рис. 11

*Решение.* Пусть $\angle BAK = \alpha$. Тогда $\angle AKB = 180° - 15° - \alpha = 165° - \alpha$, $\angle BKC = 360° - 120° - (165° - \alpha) = 75° + \alpha$ и $\angle BCK = 180° - 15° - (75° + \alpha) = 90° - \alpha$ (рисунок 11). Пусть $BK = x$. Применив теорему синусов к треугольникам $ABK$ и $KBC$ получим:

$$\begin{cases} \dfrac{AK}{\sin\angle ABK} = \dfrac{BK}{\sin\angle BAK}, \\ \dfrac{KC}{\sin\angle KBC} = \dfrac{BK}{\sin\angle BCK}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sin 15°} = \dfrac{x}{\sin\alpha}, \\ \dfrac{\sqrt{3}}{\sin 15°} = \dfrac{x}{\cos\alpha}; \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°.$$

Имеем, далее

$$x = \frac{\sin 60°}{\sin 15°} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1} = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},$$

поскольку

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

**Пример 7.** Найти радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 6, если синус одного его угла равен косинусу другого.

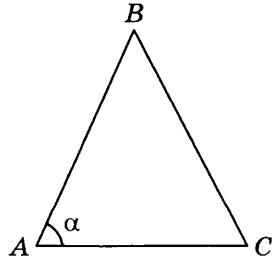


Рис. 12

*Решение.* Пусть $ABC$ — данный равнобедренный треугольник с основанием $AC = 6$, $\angle A = \angle C = \alpha$, $\angle B = 180° - 2\alpha$ (рисунок 12). Согласно условию задачи возможны три случая.

1) $\sin\alpha = \cos(180° - 2\alpha) \Leftrightarrow \sin\alpha = -\cos 2\alpha \Leftrightarrow 2\sin^2\alpha - \sin\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = 1$ или $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$. Так как $\alpha$ — угол при основании равнобедренного треугольника, то этот случай невозможен.

2) $\sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45° \Rightarrow \angle B = 90°$. В этом случае радиус описанной окружности равен половине гипотенузы и равен 3.

3) $\cos\alpha = \sin(180° - 2\alpha) \Leftrightarrow \cos\alpha = \sin 2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \Rightarrow \alpha = 30° \Rightarrow \angle B = 120°$. Применив к треугольнику $ABC$ теорему синусов, получим, что $R = \frac{AC}{2\sin\angle B} = \frac{6}{2\sin 120°} = 2\sqrt{3}$.

Ответ: 3 или $2\sqrt{3}$.

**Пример 8.** В треугольнике $ABC$ длины сторон $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{5}$ и $AC = 3$. Сравнить величину угла $BOC$ и 112,5°, если $O$ — центр вписанной в треугольник $ABC$ окружности.

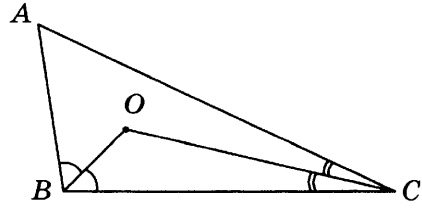


Рис. 13

*Решение.* Обозначим углы $A$, $B$, $C$ треугольника $ABC$ через $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ соответственно. Тогда $\angle OBC = \frac{\beta}{2}$, а $\angle OCB = \frac{\gamma}{2}$ (рисунок 13). Имеем:

$$\angle BOC = 180° - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = 180° - \frac{\beta + \gamma}{2} = 180° - \frac{180° - \alpha}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}.$$

Для нахождения угла $\alpha$ применим к треугольнику $ABC$ теорему косинусов:

$$\cos\alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{2+9-5}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45°.$$

Таким образом, $\angle BOC = 90° + \frac{45°}{2} = 112{,}5°$.

Ответ: $\angle BOC = 112{,}5°$.

**Пример 9.** Периметр треугольника $ABC$ равен 36, а его площадь равна 60. Найти стороны $AB$ и $AC$, если $BC = 10$.

*Решение.* Пусть $AB = x$, $AC = y$. Вычислим площадь треугольника по формуле Герона: $S = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}$, где $p = 18$ — полупериметр треугольника $ABC$. Имеем:

$$\begin{cases} 60 = \sqrt{18(18-x)(18-y)(18-10)}, \\ x+y+10 = 36; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (18-x)(18-y) = 25, \\ x+y = 26; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (18-x)(x-8) = 25 \Leftrightarrow x^2 - 26x + 169 = 0 \Leftrightarrow x = 13.$$

Тогда $y = 26 - x = 13$.

Ответ: $AB = AC = 13$.

**Пример 10.** Треугольник $ABC$, длины сторон которого образуют арифметическую прогрессию, вписан в окружность радиуса $\frac{14}{\sqrt{3}}$. Найти периметр этого треугольника, если он меньше 40, а $AC = 14$.

*Решение.* Если треугольник $ABC$ равносторонний или $AC$ — средняя по длине сторона треугольника, то его периметр равен 42. Действительно, пусть $AB = 14 - x$, а $BC = 14 + x$. Тогда $AB + AC + BC = 14 - x + 14 + 14 + x = 42$. Если $AC$ — меньшая сторона треугольника, то $AB + AC + BC > 3 \cdot 14 = 42$. Значит, $AC$ — большая сторона треугольника $ABC$. Пусть $AB = 14 - x$, $BC = 14 - 2x$, $x > 0$. Применим к треугольнику $ABC$ теорему синусов. Имеем:

$$\frac{AC}{\sin\angle B} = 2R \Leftrightarrow \frac{14}{\sin\angle B} = \frac{28}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin\angle B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит, угол $B$ равен 60° или 120°. Если $\angle B = 60°$, то он не является большим углом в треугольнике $ABC$, поэтому $AC$ не может быть большей его стороной, что противоречит условию. Следовательно, $\angle B = 120°$. Применив теперь к треугольнику $ABC$ теорему косинусов, получим:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 196 = (14 - x)^2 + (14 - 2x)^2 - 2(14 - x)(14 - 2x)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 18x + 56 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ или } x = 14.$$

По смыслу задачи подходит $x = 4$. Тогда $AB = 10$, $BC = 6$ и периметр треугольника $ABC$ равен 30.

Ответ: 30.

**Пример 11.** Найти площадь треугольника $ABC$, если известно, что $\angle ABC = \frac{\pi}{12}$, $BC = 5$, $2AC > AB$ и медиана $CD$ образует со стороной $AC$ треугольника угол величиной $5\pi / 12$.

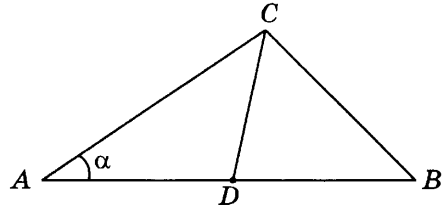


Рис. 14

*Решение.* Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle ADC = \frac{7\pi}{12} - \alpha$, $\angle BDC = \alpha + \frac{5\pi}{12}$, $\angle BCD = \frac{\pi}{2} - \alpha$ и $\angle ACB = \frac{11\pi}{12} - \alpha$ (рисунок 14). Применим к треугольникам $ABC$ и $DBC$ теорему синусов. Имеем:

$$\frac{AB}{\sin(\frac{11\pi}{12} - \alpha)} = \frac{5}{\sin\alpha} \quad \text{и} \quad \frac{BD}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{5}{\sin(\alpha + \frac{5\pi}{12})}.$$

Разделив первое из полученных равенств на второе, с учетом $AB = 2BD$, получим:

$$\frac{2\cos\alpha}{\sin(\frac{11\pi}{12}-\alpha)}=\frac{\sin(\alpha+\frac{5\pi}{12})}{\sin\alpha} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\alpha+\frac{5\pi}{12}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2\alpha=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2\alpha=\frac{1}{2}.$$

По условию выполняется неравенство $AC > AD$, значит, $\frac{7\pi}{12}-\alpha>\frac{5\pi}{12}$, то есть $\alpha<\frac{\pi}{6}$. Следовательно, $\alpha=\frac{\pi}{12}$, $AB=\frac{5}{2\sin\alpha}$ и $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\frac{25}{4}$.

Ответ: 25/4.

**Пример 12.** В остроугольном треугольнике $BCD$ проведена высота $CE$ и из точки $E$ опущены перпендикуляры $EM$ и $EN$ на стороны $BC$ и $CD$. Известно, что $CE = b$, $MN = a$. Найти угол $BCD$.

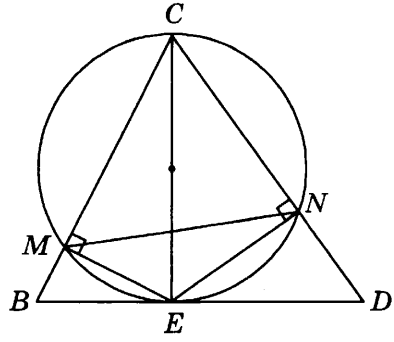


Рис. 15

*Решение.* Если мы построим на отрезке $CE$ как на диаметре окружность, то точки $M$ и $N$ будут лежать на этой окружности (так как углы $CME$ и $CNE$ — прямые). Следовательно, данная окружность будет описана около треугольника $CMN$ (рисунок 15). Применим к этому треугольнику теорему синусов. Имеем:

$$\frac{MN}{\sin\angle MCN}=2R \Leftrightarrow \frac{MN}{\sin\angle BCD}=CE \Leftrightarrow \frac{a}{\sin\angle BCD}=b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\angle BCD=\frac{a}{b}.$$

Так как треугольник $BCD$ — остроугольный, то $\angle BCD=\arcsin\frac{a}{b}$. Заметим, что одно из условий задачи никак не использовалось при ее решении.

Ответ: $\arcsin\frac{a}{b}$.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**1.** Дан прямоугольный треугольник $ABC$ с прямым углом при вершине $C$. Угол $CAB$ равен $\alpha$. Биссектриса угла $ABC$ пересекает катет $AC$ в точке $K$. На стороне $BC$ как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу $AB$ в точке $M$. Найти угол $AMK$.

**2.** В треугольнике $ABC$ задана точка $M$ на стороне $AC$, соединенная с вершиной $B$ прямолинейным отрезком $MB$. Известно, что $AM = 6$, $MC = 2$, $\angle ABM = 60°$, $\angle MBC = 30°$. Найти площадь треугольника $ABC$.

**3.** В треугольнике $ABC$ длина стороны $AC$ равна 3, угол $BAC$ равен $\pi / 6$ и радиус описанной окружности равен 2. Доказать, что площадь треугольника $ABC$ меньше 3.

**4.** В ромбе $ABCD$ со стороной, равной 6, и углом $BAD$, равным $\pi / 3$, на стороне $BC$ взята точка $E$ на расстоянии 2 от точки $C$. Найти расстояние от точки $E$ до центра ромба.

**5.** В треугольнике $ABC$ известно, что $AB=\frac{5\sqrt{2}}{2}$, $BC=\frac{5\sqrt{5}}{4}$. Точка $M$ лежит на стороне $AB$, точка $O$ лежит на стороне $BC$, причем прямые $MO$ и $AC$ параллельны. Отрезок $BM$ в 1,5 раза длиннее отрезка $AM$. Биссектриса угла $BAC$ пересекает прямую $MO$ в точке $P$, лежащей между точками $M$

и $O$, причем радиус окружности, описанной около треугольника $AMP$, равен $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Найти длину стороны $AC$.

**6.** В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла $BAD$ пересекает сторону $CD$ в точке $M$ такой, что $DM : MC = 2 : 1$. Известно, что величина угла $CAM$ равна $\alpha$. Найти величину угла $BAD$.

**7.** Из точки $M$ на окружности проведены три хорды: $MN = 1$, $MP = 6$, $MQ = 2$. При этом углы $NMP$ и $PMQ$ равны. Найти радиус окружности.

**8.** Окружность с центром в точке $O$, лежащей на гипотенузе $AC$ прямоугольного треугольника $ABC$, касается его катетов $AB$ и $BC$. Найти длину $AC$, если $AM = \frac{20}{9}$ и $AN : MN = 6 : 1$, где $M$ — точка касания $AB$ с окружностью, а $N$ — точка пересечения окружности с $AC$, расположенная между точками $A$ и $O$.

**9.** В треугольнике $ABC$ сторона $BC$ равна 6, сторона $AC$ равна 5, а угол при вершине $B$ равен 30°. Найти площадь треугольника, если расстояние от вершины $A$ до прямой $BC$ меньше, чем $1/\sqrt{2}$.

**10.** В ромбе $ABCD$ угол при вершине $A$ равен $\pi/3$. Точка $N$ делит сторону $AB$ в отношении $AN : NB = 2 : 1$. Определить тангенс угла $DNC$.

**11.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AC$ точка $D$ делит сторону $BC$ в отношении $2 : 1$, считая от вершины $B$, а точка $E$ — середина стороны $AB$. Известно, что медиана $CQ$ треугольника $CED$ равна $\frac{\sqrt{23}}{2}$ и $DE = \frac{\sqrt{23}}{2}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$.

**12.** У треугольника известны длины двух сторон $a = 2$, $b = 3$ и площадь $S = \frac{3\sqrt{15}}{4}$. Медиана, проведенная к его третьей

стороне, меньше ее половины. Найти радиус описанной около этого треугольника окружности.

**13.** В треугольнике $ABC$ сторона $AB = 6$, $\angle BAC = 30°$, радиус описанной окружности равен 5. Найти сторону $AC$.

**14.** Радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$, равен $25/12$, $BC = 4$ и $\cos\angle B = 0{,}8$. Найти $AB$.

**15.** В треугольнике $BCD$ известны длины сторон: $BC = 5$, $CD = 6$, $BD = 7$. Три окружности попарно касаются друг друга внешним образом в точках $B$, $C$ и $D$. Найти радиус наибольшей окружности.

**16.** В треугольнике $KLM$ через основание $N$ высоты $KN$ проведены прямые, перпендикулярные сторонам $KL$ и $KM$ и пересекающие их в точках $A$ и $B$ соответственно. Отрезок $AB$ равен $a$, а радиус описанной около треугольника $KLM$ окружности равен $R$. Найти площадь треугольника $KLM$.

**17.** Прямая, проходящая через вершину основания равнобедренного треугольника, делит его площадь пополам, а периметр треугольника делит на части 5 и 7. Найти площадь треугольника и указать, где лежит центр описанной окружности: внутри или вне треугольника.

**18.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AC$ проведены биссектриса $CD$ и прямая $DE$, перпендикулярная $CD$ (точка $E$ лежит на прямой $AC$). Найти площадь треугольника $ABC$, если $CE = 4$, а $CA = 3$.

**19.** В треугольнике $ABC$ угол $C$ прямой, тангенс угла $A$ равен 0,25, медиана $BD$ равна $\sqrt{5}$. Найти площадь треугольника $ABD$ и радиус окружности, описанной около этого треугольника.

**20.** Окружность радиуса 3 проходит через середины трех сторон треугольника $ABC$, в котором величины углов $A$ и $B$ равны 60° и 45° соответственно. Найти площадь треугольника $ABC$.

**21.** На окружности радиуса 5, описанной около правильного треугольника, взята точка $D$. Известно, что расстояние

от точки $D$ до одной из вершин треугольника равно 9. Найти сумму расстояний от точки $D$ до двух других вершин треугольника.

**22.** В равнобедренном треугольнике $KLM$ углы при основании $KM$ равны 50°, а точка $O$ внутри треугольника расположена так, что $\angle OKL = 20°$, а $\angle OML = 40°$. Найти величину угла $KOL$.

**23.** В треугольнике $ABC$ угол при вершине $B$ равен $\pi / 3$, а длины отрезков, соединяющих центр вписанной окружности с вершинами $A$ и $C$, равны 4 и 6 соответственно. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник $ABC$.

**24.** Высота треугольника имеет длину 2, делит угол треугольника в отношении 2 : 1 и делит основание треугольника на части, меньшая из которых равна 1. Найти площадь этого треугольника.

**25.** В прямоугольном треугольнике $ADC$ гипотенуза $DC$ является хордой окружности радиуса 1, которая пересекает катеты $AD$ и $AC$ в точках $E$ и $B$ соответственно. Найти $DB$, если угол $DBE$ равен 30°, а площадь треугольника $DEC$ равна $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$.

## § 3. БИССЕКТРИСА И МЕДИАНА ТРЕУГОЛЬНИКА

В этом параграфе сформулируем несколько теорем, касающихся биссектрис и медиан произвольного треугольника, а также формул для нахождения их длин. Все обозначения предполагаются стандартными.

**Теорема 1.** (Формула для вычисления длины биссектрисы.) В произвольном треугольнике справедливо соотношение

$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}.$$

**Теорема 2.** (Формула для вычисления длины биссектрисы.) В произвольном треугольнике справедливо соотношение

$$l_a^2 = bc - xy,$$

где $x$, $y$ — отрезки, на которые биссектриса $l_a$ делит сторону $a$.

**Теорема 3.** Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в этой точке на отрезки, длины которых относятся как 2 : 1, считая от вершины.

**Теорема 4.** (Формула для вычисления длины медианы.) В произвольном треугольнике справедливо соотношение

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

**Теорема 5.** (Теорема о биссектрисе внутреннего угла.) Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

**Теорема 6.** Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром вписанной в этот треугольник окружности.

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ из вершины прямого угла $C$ проведены биссектриса $CL$ и медиана $CM$. Найти площадь треугольника $ABC$, если $LM = a$, $CM = b$.

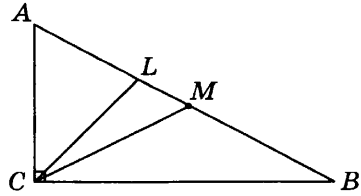


Рис. 16

*Решение.* Пусть, для определенности, точка $L$ лежит между точками $A$ и $M$. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы. Поэтому $AM = BM = b$, откуда $AL = b - a$, $LB = b + a$ (рисунок 16). Применим к треугольнику $ABC$ теорему о биссектрисе внутреннего угла треугольника. Имеем:

$$\frac{LB}{AL} = \frac{BC}{AC} \Leftrightarrow \frac{b+a}{b-a} = \frac{BC}{AC} \Leftrightarrow BC = AC \cdot \frac{b+a}{b-a}.$$

Применив теперь к треугольнику $ABC$ теорему Пифагора, получим:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \quad \Leftrightarrow 4b^2 = AC^2\left(1 + \frac{(b+a)^2}{(b-a)^2}\right) = AC^2\left(\frac{2(b^2+a^2)}{(b-a)^2}\right),$$

откуда $AC = \dfrac{2b(b-a)}{\sqrt{2(b^2+a^2)}}$ и $BC = \dfrac{2b(b+a)}{\sqrt{2(b^2+a^2)}}$. Следовательно, искомая площадь равна $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC = \dfrac{b^2(b^2-a^2)}{b^2+a^2}$.

Ответ: $\dfrac{b^2(b^2-a^2)}{b^2+a^2}$.

**Пример 2.** В треугольнике $ABC$ медианы $AE$ и $BD$, проведенные к сторонам $BC$ и $AC$, пересекаются под прямым углом. Длина стороны $BC$ равна $a$. Найдите длины других сторон треугольника $ABC$, если $AE^2 + BD^2 = d^2$.

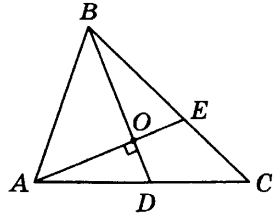


Рис. 17

*Решение.* Пусть $O$ — точка пересечения медиан треугольника $ABC$. Пусть $OE = x$ и $OD = y$. Так как медианы делятся точкой пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины, то $OA = 2x$ и $OB = 2y$ (рисунок 17). Условие $AE^2 + BD^2 = d^2$ перепишем в виде

$$x^2 + y^2 = \frac{d^2}{9}. \qquad (*)$$

Из прямоугольного треугольника $OBE$ и равенства $BE = \frac{a}{2}$, применив теорему Пифагора, получим:

$$x^2 + 4y^2 = \frac{a^2}{4}. \qquad (**)$$

Далее, применив теорему Пифагора к треугольнику $ABO$, найдем, что

$$AB^2 = 4(x^2 + y^2) \overset{(*)}{=} \frac{4d^2}{9},$$

откуда $AB = \frac{2d}{3}$. Наконец, применим теорему Пифагора к треугольнику $AOD$. Имеем:

$$AD^2 = 4x^2 + y^2 = 5(x^2 + y^2) - (x^2 + 4y^2) \overset{(*),(**)}{=} \frac{5d^2}{9} - \frac{a^2}{4},$$

откуда $AC^2 = 4AD^2 = \frac{20d^2 - 9a^2}{9}$ и $AC = \frac{1}{3}\sqrt{20d^2 - 9a^2}$.

Ответ: $\frac{2d}{3}$, $\frac{\sqrt{20d^2 - 9a^2}}{3}$.

**Пример 3.** В треугольнике $ABC$ биссектриса угла $ABC$ пересекает сторону $AC$ в точке $K$. Известно, что $BC = 2$, $KC = 1$, $BK = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Найти площадь треугольника $ABC$.

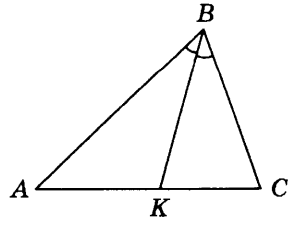


Рис. 18

*Решение.* Пусть $AK = x$ (рисунок 18). Применив к треугольнику $ABC$ теорему о биссектрисе внутреннего угла, получим, что

$$\frac{AB}{AK} = \frac{BC}{KC} \Leftrightarrow \frac{AB}{x} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow AB = 2x.$$

Применим теперь к треугольнику $ABC$ формулу для вычисления длины биссектрисы. Имеем:

$$BK^2 = AB \cdot BC - AK \cdot KC \Leftrightarrow \frac{9}{2} = 2x \cdot 2 - x \cdot 1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Значит, стороны треугольника $ABC$ равны $AB = 3$, $AC = \frac{5}{2}$ и $BC = 2$, а полупериметр равен $p = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{5}{2} + 2\right) = \frac{15}{4}$. Для вычисления площади треугольника воспользуемся формулой Герона:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{\frac{15}{4}\left(\frac{15}{4} - 3\right)\left(\frac{15}{4} - \frac{5}{2}\right)\left(\frac{15}{4} - 2\right)} = \frac{15\sqrt{7}}{16}.$$

Ответ: $\frac{15\sqrt{7}}{16}$.

**Пример 4.** В треугольнике $ABC$ биссектриса $BE$ и медиана $AD$ перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника $ABC$.

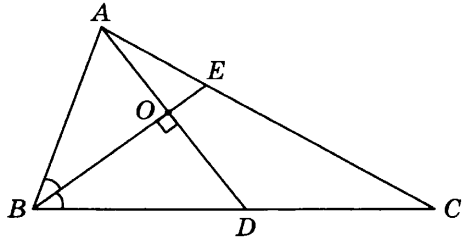


Рис. 19

*Решение.* Пусть $O$ — точка пересечения прямых $AD$ и $BE$. Рассмотрим треугольник $ABD$, в нем отрезок $BO$ является и высотой, и биссектрисой. Поэтому треугольник $ABD$ равнобедренный: $AB = BD$ и $AO = OD = \frac{AD}{2} = 2$. Пусть $AB = x$, тогда $BC = 2x$ (рисунок 19). К треугольнику $ABC$ применим теорему о биссектрисе внутреннего угла. Имеем:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AE}{EC}\Leftrightarrow EC=2AE.$$

Пусть $AE = y$, тогда $EC = 2y$. Применив формулы для вычисления длин биссектрисы и медианы к треугольнику $ABC$, его биссектрисе $BE$ и медиане $AD$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} AB\cdot BC-AE\cdot EC=BE^2, \\ 2AB^2+2AC^2-BC^2=4AD^2; \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2x^2-2y^2=16, \\ 64=2x^2+2\cdot(3y)^2-(2x)^2; \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-y^2=8, \\ 9y^2-x^2=32; \end{cases}\Rightarrow$$

$x=\sqrt{13}$, $y=\sqrt{5}$, откуда $AB=\sqrt{13}$, $BC=2\sqrt{13}$, $AC=3\sqrt{5}$.

Ответ: $\sqrt{13}$, $2\sqrt{13}$, $3\sqrt{5}$.

**Пример 5.** В треугольнике $ABC$ косинус угла $A$ равен 1/8, длина биссектрисы $AL$ этого треугольника равна 10/3, длина стороны $BC$ равна 6. Найти длины сторон $AB$ и $AC$ этого треугольника.

*Решение.* Пусть $\angle A = \alpha$, $\cos\alpha=\frac{1}{8}$. Тогда $\cos\frac{\alpha}{2}=$ $=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\frac{3}{4}$. Пусть также $AB = x$, $AC = y$. Применив к треугольнику $ABC$ формулу для вычисления длины биссектрисы, а также теорему косинусов, получим следующую систему:

$$\begin{cases} AL=\dfrac{2AB\cdot AC\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{AB+AC}, \\ BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\alpha; \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{2xy\cdot\frac{3}{4}}{x+y}=\dfrac{10}{3}, \\ x^2+y^2-2xy\cdot\dfrac{1}{8}=36; \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 9xy=20(x+y), \\ x^2+y^2=36+\frac{1}{4}xy; \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 9xy=20(x+y), \\ (x+y)^2=36+\frac{9}{4}xy; \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x+y)^2=36+5(x+y).$$

Положительный корень этого уравнения есть $x + y = 9$. Следовательно, $xy = 20$, откуда $x = 5$, $y = 4$, или $x = 4$, $y = 5$.

Ответ: $AB = 5$, $AC = 4$; или $AB = 4$, $AC = 5$.

**Пример 6.** В треугольнике $ABC$ биссектрисы $AA_1$ и $BB_1$ пересекаются в точке $O$. Известно, что $2 \cdot AO = 7 \cdot OA_1$ и $BO = 2 \cdot OB_1$. Найти отношение высоты, опущенной из точки $C$, к радиусу вписанной в треугольник $ABC$ окружности.

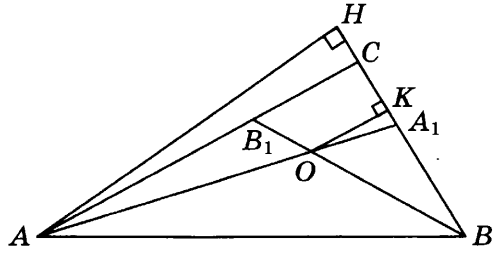


Рис. 20

*Решение.* Пусть $AO = 7x$, $BO = 2y$, тогда $OA_1 = 2x$, $OB_1 = y$. Опустим из точек $A$ и $O$ перпендикуляры $AH$ и $OK$ на прямую $BC$ (рисунок 20). Так как треугольники $AHA_1$ и $OKA_1$ подобны, то

$$\frac{AH}{OK} = \frac{AA_1}{OA_1} \Leftrightarrow \frac{h_a}{r} = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{2}{9r}.$$

Аналогично $\frac{h_b}{r} = 3$, откуда $\frac{1}{h_b} = \frac{1}{3r}$. Воспользуемся равенством $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$. Действительно, домножив обе части этого равенства на $2S$ ($S$ — площадь треугольника), получим и справа и слева число $a + b + c$, то есть периметр треугольника. Имеем:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \Leftrightarrow \frac{2}{9r} + \frac{1}{3r} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \Leftrightarrow \frac{1}{h_c} = \frac{4}{9r},$$

откуда $\frac{h_c}{r} = \frac{9}{4}$.

Ответ: 9/4.

**Пример 7.** На сторонах $AB$, $BC$ и $AC$ треугольника $ABC$ взяты точки $D$, $E$ и $F$ соответственно. Отрезки $AE$ и $DF$ проходят через центр $O$ вписанной в треугольник $ABC$ окружности, а прямые $DF$ и $BC$ параллельны. Найти длину отрезка $BE$ и периметр треугольника $ABC$, если $BC = 15$, $BD = 6$, $CF = 4$.

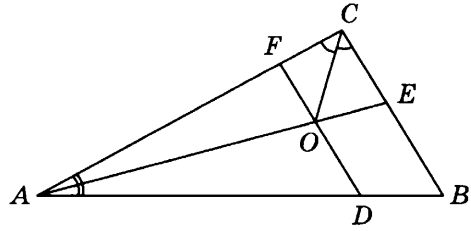


Рис. 21

*Решение.* Согласно теореме о биссектрисе внутреннего угла имеем $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{FC} = \frac{3}{2}$, так как прямые $BC$ и $DF$ параллельны (рисунок 21). Отсюда находим, что $BE = 9$ и $EC = 6$. Пусть теперь $AF = x$. Так как $CO$ — биссектриса треугольника $ACE$, то

$$\frac{CA}{CE} = \frac{AO}{OE} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{x+4}{6} = \frac{x}{4} \Leftrightarrow x = 8.$$

Следовательно, $AD = 12$ и периметр треугольника $ABC$ равен 45.

Ответ: $BE = 9$, $P = 45$.

**Пример 8.** В треугольнике $ABC$, все стороны которого различны, биссектриса угла $BAC$ пересекает сторону $BC$ в точке $D$. Известно, что $AB - BD = a$, $AC + CD = b$. Найти длину отрезка $AD$.

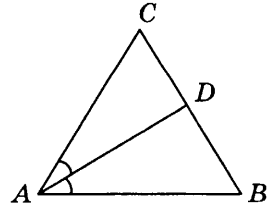


Рис. 22

*Решение.* Проведем следующие преобразования (рисунок 22):

$$ab = (AB - BD)(AC + CD) = AB \cdot AC + AB \cdot CD - BD \cdot AC - BD \cdot CD =$$
$$= (AB \cdot AC - BD \cdot CD) + (AB \cdot CD - BD \cdot AC).$$

Выражение, стоящее в первой скобке, равно $AD^2$ согласно формуле для вычисления длины биссектрисы. Выражение, стоящее во второй скобке, равно 0, так как $AB \cdot CD = BD \cdot AC \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ согласно теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника. Таким образом, $ab = AD^2$, откуда $AD = \sqrt{ab}$.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**1.** Дан треугольник со сторонами 4, 8 и 9. Найти длину биссектрисы, проведенной к большей стороне.

**2.** В треугольнике $ABC$ длина стороны $AB$ равна 21, длина биссектрисы $BD$ равна $8\sqrt{7}$, а длина отрезка $DC$ равна 8. Найти периметр треугольника $ABC$.

**3.** В треугольнике $ABC$ проведены биссектрисы $BL$ и $AE$, которые пересекаются в точке $O$. Известно, что $AB = BL$, периметр треугольника равен 28, $BO = 2OL$. Найти $AB$.

**4.** В равнобедренном треугольнике $BCD$ ($BC = CD$) проведена биссектриса $BE$. Известно, что $CE = c$, $DE = d$. Найти $BE$.

**5.** В треугольнике $ABC$ угол $C$ равен 60°, а биссектриса угла $C$ равна $5\sqrt{3}$. Длины сторон $AC$ и $BC$ относятся как 5 : 2 соответственно. Найти тангенс угла $A$ и сторону $BC$.

**6.** В треугольнике $ABC$ известно, что $AB = c$, $AC = b$, $AD$ — биссектриса угла $BAC$. Через точку $D$ проведена прямая, перпендикулярная прямой $AD$ и пересекающая прямую $AC$ в точке $E$. Найти $AE$.

**7.** В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна $c$, а острый угол равен $\alpha$. Найти длину биссектрисы прямого угла.

**8.** В треугольнике $ABC$ медианы $AM$ и $CL$ перпендикулярны, $BC = a$, $AC = b$. Найти площадь треугольника $ABM$.

**9.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ высота, опущенная на гипотенузу, равна $12/5$, а биссектриса прямого угла равна $12\sqrt{2}\ /\ 7$. Найти площадь треугольника $ABC$.

**10.** В треугольнике $ABC$ известны длины сторон $AB = 14$, $BC = 6$, $AC = 10$. Биссектрисы $BD$ и $CE$ пересекаются в точке $O$. Найти $OD$.

**11.** В треугольнике $KLM$ известны длины сторон $KL = m$, $LM = k$, $MK = l$. Биссектрисы $KA$ и $MB$ пересекаются в точке $O$, диагонали четырехугольника $AOBL$ пересекаются в точке $C$. Найти отношение $BC : CA$.

**12.** В треугольнике $PQR$ длина биссектрисы $PO$ равна 6, отношение длин отрезков $QO$ и $OR$ равно 3 : 4, периметр треугольника $PQR$ равен 21. Чему равен косинус угла $QPR$?

**13.** В треугольнике $ABC$ известны длины сторон $AB = 8$, $BC = 6$ и биссектриса $BD = 6$. Найти длину медианы $AE$.

**14.** Определить угол $A$ треугольника между сторонами 2 и 4, если медиана, выходящая из вершины $A$, равна $\sqrt{7}$.

**15.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AC$ медианы $AM$ и $CN$ пересекаются в точке $D$ под прямым углом. Найти углы треугольника $ABC$ и площадь четырехугольника $NBMD$, если $AC = 1$.

**16.** Биссектриса $CD$ угла $ACB$ равнобедренного треугольника $ABC$ делит его сторону $AB$ так, что $AD = BC$. Найти длину биссектрисы $CD$ и площадь треугольника $ABC$, если его основание $BC$ равно 2.

# § 4. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ И ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

В этом параграфе сформулируем теорему Фалеса, определение и признаки подобия треугольников, а также еще две теоремы, которые часто применяются при решении задач.

**Теорема 1.** (Теорема Фалеса.) Параллельные прямые высекают на пересекающих их прямых пропорциональные отрезки.

Два треугольника называются подобными, если соответствующие стороны у них пропорциональны. Заметим, что у подобных треугольников пропорциональны также все соответствующие элементы (высоты, медианы, биссектрисы, радиусы вписанной и описанной окружностей и т.д.).

**Теорема 2.** (Первый признак подобия.) Если один угол первого треугольника равен углу второго треугольника, а прилежащие к этим углам стороны треугольников пропорциональны, то такие треугольники подобны.

**Теорема 3.** (Второй признак подобия.) Если два угла одного треугольника равны соответственно двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

**Теорема 4.** Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия.

**Теорема 5.** (Теорема Менелая.) Если некоторая прямая пересекает стороны $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$ в точках $X$ и $Y$ соответственно, а продолжение стороны $AC$ — в точке $Z$, то $\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CZ}{ZA}=1$ (рисунок 23).

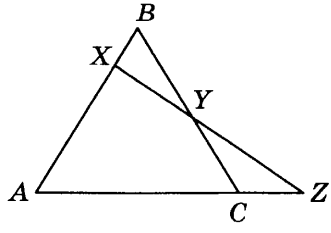


Рис. 23

**Теорема 6.** Пусть в остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AA_1$ и $CC_1$. Тогда треугольники $A_1BC_1$ и $ABC$ подобны, причем коэффициент подобия $k = \cos\angle B$.

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Дана трапеция $ABCD$, причем известно, что $BC = a$ и $AD = b$. Параллельно ее основаниям $BC$ и $AD$ проведена прямая, пересекающая сторону $AB$ в точке $P$, диагональ $AC$ в точке $L$, диагональ $BD$ в точке $R$ и сторону $CD$ в точке $Q$. Известно, что $PL = LR$. Найти $PQ$.

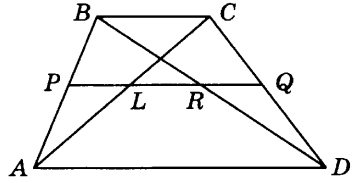


Рис. 24

*Решение.* Докажем сначала, что $PL = RQ$. Из подобия треугольников $APL$ и $ABC$ получаем, что $\frac{PL}{BC} = \frac{AP}{AB}$, а из подобия треугольников $DQR$ и $DCB$ находим, что $\frac{RQ}{BC} = \frac{DQ}{DC}$ (рисунок 24). Согласно теореме Фалеса имеем:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{DQ}{DC} \Leftrightarrow \frac{PL}{BC} = \frac{RQ}{BC},$$

откуда $PL = RQ$.

Обозначим теперь $PL = LR = RQ = x$ и рассмотрим снова две пары подобных треугольников:

$$\Delta APL \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{PL}{BC} = \frac{AP}{AB} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{AP}{AB};$$

$$\Delta PBR \sim \Delta ABD \Rightarrow \frac{PR}{AD} = \frac{PB}{AB} \Leftrightarrow \frac{2x}{b} = \frac{PB}{AB}.$$

Далее $\frac{AP}{AB} + \frac{PB}{AB} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{2x}{b} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{ab}{2a+b}$.

Значит, $PQ = \frac{3ab}{2a+b}$.

Ответ: $\frac{3ab}{2a+b}$.

**Пример 2.** В остроугольном треугольнике $ABC$ из вершин $A$ и $C$ опущены высоты $AP$ и $CQ$ на стороны $BC$ и $AB$. Известно, что площадь треугольника $ABC$ равна 18, площадь треугольника $BPQ$ равна 2, а длина отрезка $PQ$ равна $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$.

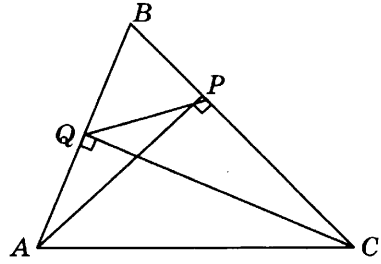


Рис. 25

*Решение.* Согласно теореме 6 треугольник $BPQ$ подобен треугольнику $BAC$ с коэффициентом подобия $k = \cos\angle B$ (рисунок 25). Но, с другой стороны, площади этих треугольников относятся как 1 : 9, т.е. коэффициент подобия равен 1/3. Следовательно, $\cos\angle B = \frac{1}{3}$, $\sin\angle B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ и радиус окружности, описанной около треугольника $BPQ$, равен $R_{\Delta BPQ} = \frac{PQ}{2\sin\angle B} = \frac{3}{2}$. Так как радиусы окружностей, описанных около подобных треугольников, относятся как коэффициент подобия, то радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$, в три раза больше радиуса окружности, описанной около треугольника $BPQ$, и равен $R_{\Delta ABC} = 3R_{\Delta BPQ} = \frac{9}{2}$.

Ответ: 9/2.

**Пример 3.** В треугольнике $ABC$ угол $C$ тупой, $D$ — точка пересечения прямой $DB$, перпендикулярной к $AB$, и прямой $DC$, перпендикулярной к $AC$. Высота треугольника $ADC$, проведенная из вершины $C$, пересекает $AB$ в точке $M$. Известно, что $AM = a$, $MB = b$. Найти $AC$.

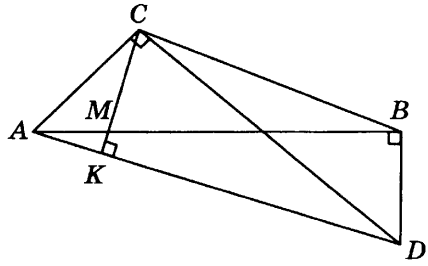


Рис. 26

*Решение.* Пусть $K$ — основание высоты треугольника $ADC$, опущенной из точки $C$ на прямую $AD$ (рисунок 26). Треугольники $AMK$ и $ADB$ подобны, значит, верно равенство

$$\frac{AM}{AD} = \frac{AK}{AB} \Leftrightarrow AD \cdot AK = a(a+b).$$

Треугольники $ACK$ и $ADC$ также подобны, имеем

$$\frac{AK}{AC} = \frac{AC}{AD} \Leftrightarrow AD \cdot AK = AC^2.$$

Следовательно, $AC^2 = a(a+b)$, откуда $AC = \sqrt{a(a+b)}$.

Ответ: $\sqrt{a(a+b)}$.

**Пример 4.** Точка $P$ лежит на боковой стороне $MN$ трапеции $KLMN$. Кроме того, известно, что $\angle LMN = \angle MLN = \angle KLP = \arccos\frac{3}{4}$ и $PL = 18$. Найти длину отрезка $KL$.

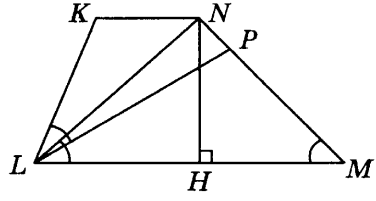


Рис. 27

*Решение.* Проведем высоту $NH$ треугольника $LNM$. Так как этот треугольник равнобедренный, то $H$ — середина $LM$ (рисунок 27). Из условия задачи вытекает, что $\angle PLM = \angle KLN$. Кроме того, $\angle MLN = \angle KNL$ (как накрест лежащие). Тогда треугольники $PLM$ и $KLN$ подобны (по двум углам). Имеем:

$$\frac{PL}{KL}=\frac{LM}{LN}=\frac{2LH}{LN}=2\cos\angle MLN=\frac{3}{2}\Leftrightarrow KL=\frac{2}{3}PL=12.$$

Ответ: 12.

**Пример 5.** На продолжении биссектрисы $AL$ треугольника $ABC$ за точку $A$ взята такая точка $D$, что $AD = 10$ и $\angle BDC = \angle BAL = 60°$. Найти площадь треугольника $ABC$.

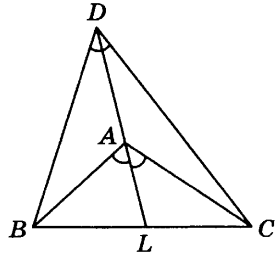


Рис. 28

*Решение.* Из условия задачи вытекает, что $\angle BAD = \angle DAC = 120°$. Пусть $\angle ADB = \alpha$ (рисунок 28). Тогда $\angle CDA = 60° - \alpha$ и $\angle ACD = \alpha$. Следовательно, треугольники $BAD$ и $DAC$ подобны (по двум углам). Имеем:

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{AC}\Leftrightarrow AB\cdot AC=AD^2=100\Rightarrow S_{\Delta ABC}=$$
$$=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=25\sqrt{3}.$$

Ответ: $25\sqrt{3}$ .

**Пример 6.** В трапеции $ABCD$ с основаниями $BC$ и $AD$ боковая сторона $AB$ перпендикулярна $AD$, $BC = 5$, $AD = 7$. Точки $K$ и $M$ — середины сторон $AB$ и $CD$ соответственно. Перпендикуляр $AP$, проведенный из точки $A$ к прямой $CD$, пересекает отрезок $KM$ в точке $L$, при этом $KL : LM = 2 : 1$. Найти площадь трапеции $ABCD$.

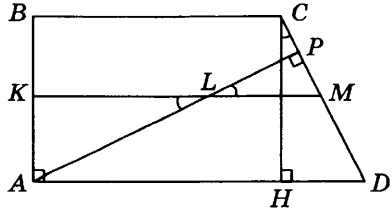


Рис. 29

*Решение.* Проведем высоту $CH$ трапеции $ABCD$. Тогда $AH = 5$, $DH = 2$, $KM = \frac{AD+BC}{2} = 6$, $KL = 4$ и $LM = 2$ (рисунок 29). Пусть $\angle KLA = \alpha$. Тогда $\angle PLM = \alpha$, $\angle LMP = 90° - \alpha$ и $\angle HCD = \alpha$. Следовательно, треугольники $KLA$ и $HCD$ подобны (по двум углам). Имеем:

$$\frac{KL}{HC} = \frac{AK}{DH} \Leftrightarrow AK \cdot HC = KL \cdot DH = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2} HC \cdot HC = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow HC^2 = 16 \Leftrightarrow HC = 4.$$

Значит, площадь трапеции $ABCD$ равна $S = KM \cdot HC = 24$.

Ответ: 24.

**Пример 7.** В треугольнике $ABC$ на основании $AC$ взяты точки $P$ и $Q$ так, что $AP < AQ$. Прямые $BP$ и $BQ$ делят медиану $AM$ на три равные части. Известно, что $PQ = 3$. Найти $AC$.

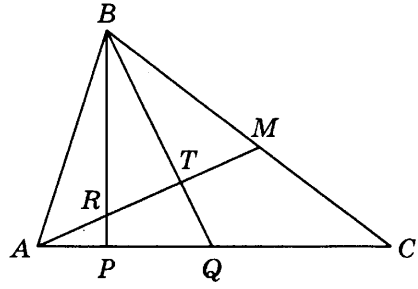


Рис. 30

*Решение.* Пусть $R$ и $T$ — точки пересечения прямой $AM$ с прямыми $BP$ и $BQ$ соответственно. Так как $AT : TM = 2 : 1$ и $AM$ — медиана треугольника $ABC$, то $BQ$ — также медиана этого треугольника (рисунок 30). Пусть $AP = x$, тогда $QC = 3 + x$. Применим к треугольнику $CAM$ и секущей $PR$ теорему Менелая. Имеем:

$$\frac{CP}{PA} \cdot \frac{AR}{RM} \cdot \frac{MB}{BC} = 1 \Leftrightarrow \frac{6+x}{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow 6 + x = 4x \Leftrightarrow x = 2.$$

Следовательно, $AC = 6 + 2x = 10$.

Ответ: 10.

**Пример 8.** Высоты $BB_1$ и $CC_1$ остроугольного треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$. Найти $BC$, если $AH = 21$ и $\angle BAC = 30°$.

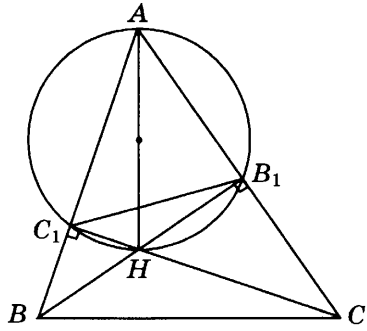


Рис. 31

*Решение.* Построим на отрезке $AH$ как на диаметре окружность. Так как углы $AB_1H$ и $AC_1H$ — прямые, то точки $B_1$ и $C_1$ лежат на этой окружности (рисунок 31). Применив к треугольнику $AB_1C_1$ теорему синусов, получим, что $B_1C_1 = 2R\sin\angle B_1AC_1 = AH \cdot \sin 30° = 10{,}5$. Треугольники $B_1AC_1$ и $BAC$ подобны, причем коэффициент подобия равен $k = \cos\angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (теорема 6). Поэтому $BC = \frac{B_1C_1}{\cos 30°} = 7\sqrt{3}$.

Ответ: $7\sqrt{3}$.

**Пример 9.** В остроугольном треугольнике $ABC$ на высоте $AD$ взята точка $M$, а на высоте $BP$ — точка $N$ так, что углы $BMC$ и $ANC$ — прямые. Расстояние между точками $M$ и $N$ равно $4+2\sqrt{3}$, а $\angle MCN = 30°$. Найти биссектрису $CL$ треугольника $CMN$.

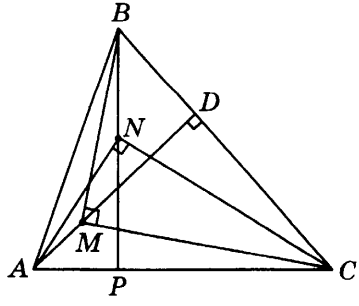


Рис. 32

*Решение.* Докажем, что треугольник $CMN$ равнобедренный, $CM = CN$ (рисунок 32). Треугольники $ANC$ и $NPC$ подобны (по двум углам), откуда $\frac{CN}{CA} = \frac{CP}{CN}$, поэтому $CN^2 = CP \cdot CA$. Аналогично $CM^2 = CD \cdot CB$. С другой стороны, $CP \cdot CA = CD \cdot CB$. Это следует из равенства $\frac{CD}{CA} = \frac{CP}{CB} = \cos\angle C$. Следовательно, $CN = CM$, что и требовалось доказать.

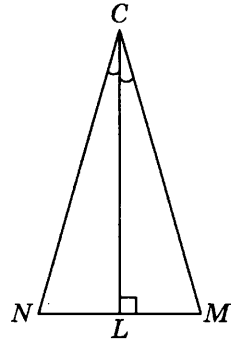


Рис. 33

Проведем биссектрису $CL$ треугольника $CNM$ (рисунок 33). Тогда $\angle MCL = 15°$ и $ML = 2 + \sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника $MCL$ находим, что $CL = \frac{ML}{\text{tg}15°}$. Вычислим $\text{tg}15°$.

Имеем:

$$\text{tg}15° = \text{tg}(60° - 45°) = \frac{\text{tg}60° - \text{tg}45°}{1 + \text{tg}60°\text{tg}45°} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

Таким образом, $CL = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$.

Ответ: $7 + 4\sqrt{3}$.

**Пример 10.** Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найти радиус описанной около треугольника окружности.

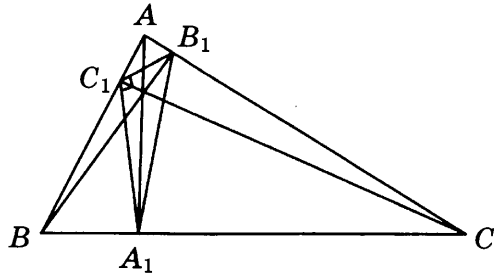


Рис. 34

*Решение.* Пусть $ABC$ — данный треугольник, $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ — его высоты, $A_1B_1 = 13$, $A_1C_1 = 12$, $B_1C_1 = 5$ (рисунок 34). Заметим сначала, что треугольник $A_1B_1C_1$ прямоугольный ($\angle C_1 = 90°$). Это следует из равенства $13^2 = 12^2 + 5^2$. Далее $\Delta A_1BC_1 \sim \Delta AB_1C_1 \sim \Delta A_1B_1C \sim \Delta ABC$ согласно теореме 6. Поэтому $\angle BC_1A_1 = \angle B_1C_1A = \angle BCA = 45°$. В силу все той же теоремы 6 получаем, что $AB = \dfrac{A_1B_1}{\cos\angle C} = 13\sqrt{2}$. И, наконец, применим к треугольнику $ABC$ теорему синусов. Имеем: $R = \dfrac{AB}{2\sin\angle C} = 13$.

Ответ: 13.

**Пример 11.** На основаниях $AD$ и $BC$ трапеции $ABCD$ построены квадраты $ADEF$ и $BCGH$, расположенные вне трапеции. Диагонали трапеции пересекаются в точке $O$. Найти длину отрезка $AD$, если $BC = 2$, $GO = 7$, а $GF = 18$.

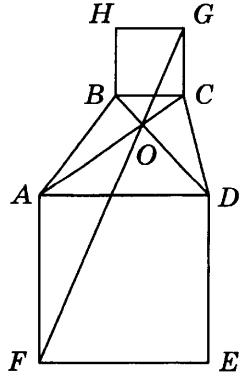


Рис. 35

*Решение.* Докажем, что точки $G$, $O$ и $F$ лежат на одной прямой (рисунок 35). Углы $ACB$ и $CAD$ равны (как накрест лежащие). Следовательно, $\angle OCG = \angle OAF$. Треугольники $COB$ и $AOD$ подобны, поэтому $\frac{CO}{AO} = \frac{CB}{AD} = \frac{CG}{AF}$. Но тогда подобны треугольники $COG$ и $AOF$ (первый признак подобия). Значит, $\angle COG = \angle AOF$ и точки $G$, $O$ и $F$ лежат на одной прямой.

Рассмотрим снова подобные треугольники $COG$ и $AOF$. Имеем: $CG = BC = 2$, $GO = 7$, $AF = AD = x$, $FO = GF - GO = 11$. Получаем следующую пропорцию:

$$\frac{CG}{GO} = \frac{AF}{FO} \Leftrightarrow \frac{2}{7} = \frac{x}{11} \Leftrightarrow x = \frac{22}{7}.$$

Следовательно, $AD = \frac{22}{7}$.

Ответ: 22/7.

**Пример 12.** В треугольник $ABC$ со сторонами $AB = 6$, $BC = 5$ и $AC = 7$ вписан квадрат, две вершины которого лежат на стороне $AC$, одна на стороне $AB$ и одна на стороне $BC$. Через середину $D$ стороны $AC$ и центр квадрата $O$ проведена прямая, которая пересекает высоту $BH$ треугольника $ABC$ в точке $M$. Найти площадь треугольника $AMC$.

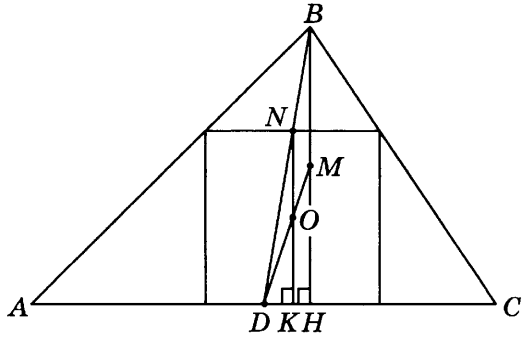


Рис. 36

*Решение.* Докажем, что $M$ — середина отрезка $BH$ (рисунок 36). Отрезок $BD$, будучи медианой треугольника $ABC$, пересекает «верхнюю» сторону квадрата в точке $N$, которая является серединой этой стороны. Проведем через

точки $N$ и $O$ прямую (параллельную $BH$), которая пересечет сторону $AC$ в точке $K$. Две пары подобных треугольников, $DON$ и $DMB$, а также $DOK$ и $DMH$ имеют одинаковый коэффициент подобия $k = DO : DM$. Поэтому из равенства $ON = OK$ следует равенство $MB = MH$, что и требовалось доказать.

Площадь треугольника $AMC$ равна половине площади треугольника $ABC$, так как эти треугольники имеют общее основание $AC$, а высота первого треугольника (проведенная к этому основанию) в два раза меньше соответствующей высоты второго треугольника. Найдем площадь треугольника $ABC$, воспользовавшись формулой Герона. Имеем:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = \sqrt{9(9-6)(9-5)(9-7)} = 6\sqrt{6}.$$

Следовательно, площадь треугольника $AMC$ равна $3\sqrt{6}$.

Ответ: $3\sqrt{6}$.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**1.** В треугольнике $ABC$ точка $D$ есть середина $AB$, точка $E$ лежит на стороне $BC$, причем $BE : EC = 1 : 2$. Отрезки $AE$ и $CD$ пересекаются в точке $O$. Найти длину стороны $AB$, если $AE = 5$, $OC = 4$, а угол $AOC$ равен $120°$.

**2.** В треугольнике $ABC$ точка $K$ на стороне $AB$ и точка $M$ на стороне $AC$ расположены так, что выполняются соотношения $AK : KB = 3 : 2$ и $AM : MC = 4 : 5$. Найти отношение, в котором прямая, проходящая через точку $K$ параллельно стороне $BC$, делит отрезок $BM$.

**3.** В треугольнике $ABC$ на стороне $AC$ взята точка $D$ так, что длина отрезка $AD$ равна 3, косинус угла $BDC$ равен $13/20$, а сумма углов $ABC$ и $ADB$ равна $\pi$. Найти периметр треугольника $ABC$, если длина стороны $BC$ равна 2.

**4.** Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию и пересекающая боковые стороны в точках $E$ и $F$. Длина отрезка $EF$ равна 2. Найти длины оснований, если их отношение равно 4.

**5.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $CC_1$ и $AA_1$. Известно, что $AC = 1$ и $\angle C_1CA_1 = \alpha$. Найти площадь круга, описанного около треугольника $C_1BA_1$.

**6.** На сторонах острого угла с вершиной $O$ взяты точки $A$ и $B$. На луче $OB$ взята точка $M$ на расстоянии $3OA$ от прямой $OA$, а на луче $OA$ — точка $N$ на расстоянии $3OB$ от прямой $OB$. Радиус окружности, описанной около треугольника $AOB$, равен 3. Найти $MN$.

**7.** В равнобедренный треугольник $ABC$ вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании $BC$, а две другие — на боковых сторонах треугольника. Сторона квадрата относится к радиусу круга, вписанного в треугольник, как 8 : 5. Найти углы треугольника.

**8.** В параллелограмме $ABCD$ со сторонами $AD = 5$ и $AB = 4$ проведен отрезок $EF$, соединяющий точку $E$ стороны $BC$ с точкой $F$ стороны $CD$. Точки $E$ и $F$ выбраны так, что $BE : EC = 1 : 2$, $CF : FE = 1 : 5$. Известно, что точка $M$ пересечения диагонали $AC$ с отрезком $FE$ удовлетворяет условию $MF : ME = 1 : 4$. Найти диагонали параллелограмма.

**9.** В остроугольном треугольнике $ABC$ угол при вершине $A$ равен 30°, а высоты $BD$ и $CE$ пересекаются в точке $O$. Найти отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников $DEO$ и $ABC$.

**10.** В параллелограмме $ABCD$ точки $E$ и $F$ лежат соответственно на сторонах $AB$ и $BC$, $M$ — точка пересечения прямых $AF$ и $DE$, причем $AE = 2BE$, а $BF = 3CF$. Найти отношение $AM : MF$.

**11.** На стороне $PQ$ треугольника $PQR$ взята точка $N$, а на стороне $PR$ — точка $L$, причем $NQ = LR$. Точка пересечения отрезков $QL$ и $NR$ делит отрезок $QL$ в отношении $m : n$, считая от точки $Q$. Найти отношение $PN : PR$.

**12.** Высоты $AK$ и $CL$ остроугольного треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$. Найти величину угла $BAC$, если $AH = HK$ и $CH = 2HL$.

**13.** В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 9$ и $CD = 5$ биссектриса угла $D$ пересекает биссектрисы углов $A$ и $C$ в точках $M$ и $N$ соответственно, а биссектриса угла $B$ пересекает те же две биссектрисы в точках $L$ и $K$, причем точка $K$ лежит на основании $AD$. В каком отношении прямая $LN$ делит сторону $AB$, а прямая $MK$ — сторону $BC$?

**14.** На стороне $AB$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбрана точка $M$ так, что угол $AMD$ равен углу $ADB$ и угол $ACM$ равен углу $ABC$. Утроенный квадрат отношения расстояния от точки $A$ до прямой $CD$ к расстоянию от точки $C$ до прямой $AD$ равен 2, $CD = 20$. Найти радиус вписанной в треугольник $ACD$ окружности.

**15.** Около треугольника $ABC$ с высотами $BB_1$ и $CC_1$ описана окружность радиуса 6. Найти радиусы окружностей, описанных около треугольников $BB_1C$ и $AB_1C_1$, если известно, что $\cos\angle BAC = -\frac{1}{3}$.

**16.** В трапеции $ABCD$ основание $AD$ в полтора раза длиннее основания $BC$, а длины боковых сторон $AB$ и $CD$ равны. На стороне $BC$ взята такая точка $K$, что $BK = 2KC$. Прямые $AK$ и $CD$ пересекаются в точке $E$, а прямые $DK$ и $AB$ — в точке $F$. Найти отношение $BF : EC$.

**17.** В трапеции $ABCD$ диагональ $AC$ перпендикулярна боковой стороне $CD$, а диагональ $DB$ перпендикулярна боковой стороне $AB$. Продолжения боковых сторон $AB$ и $DC$ пересекаются в точке $K$, образуя треугольник $AKD$ с углом $45°$ при вершине $K$. Площадь трапеции $ABCD$ равна $S$. Найти площадь треугольника $AKD$.

## § 5. ЛЕММЫ О ПЛОЩАДЯХ

В данном параграфе мы сформулируем три леммы, которые называются «леммы о площадях» и применяются для решения задач, связанных с нахождением отношения площадей треугольников. Подчеркнем, что каждая лемма представляет собой не конкретную формулировку, а некоторый тип утверждений. Первый тип мы условно назовем «общая высота», второй — «общее основание», третий — «общий угол».

**Лемма 1.** Если стороны $AC$ и $A_1C_1$ треугольников $ABC$ и $A_1BC_1$ лежат на одной прямой, то площади этих треугольников относятся как длины их оснований, а именно (см. рисунок 37):

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1BC_1}} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

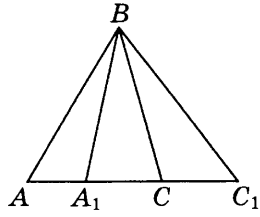


Рис. 37

**Лемма 2.** Если два треугольника $ABC$ и $AB_1C$ имеют общую сторону $AC$, то их площади относятся как длины отрезков $BD$ и $B_1D$, где $D$ — точка пересечения прямой $BB_1$ с прямой $AC$, а именно (см. рисунок 38):

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB_1C}} = \frac{BD}{B_1D}.$$

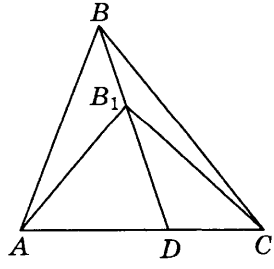


Рис. 38

**Лемма 3.** Если треугольники $ABC$ и $AB_1C_1$ имеют общий угол $A$, то их площади относятся как произведения соответствующих сторон, прилежащих к этому углу, а именно (см. рисунок 39):

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{AB_1 \cdot AC_1}.$$

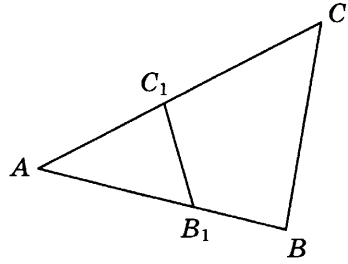


Рис. 39

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Через середину $M$ стороны $BC$ параллелограмма $ABCD$, площадь $S$ которого равна 1, и вершину $A$ проведена прямая, пересекающая диагональ $BD$ в точке $O$. Найти площадь четырехугольника $OMCD$.

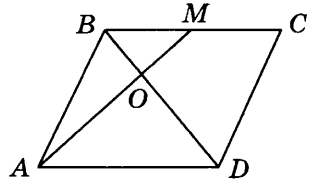


Рис. 40

*Решение.* Площадь четырехугольника $OMCD$ будем искать как разность площадей треугольников $BDC$ и $BOM$ (рисунок 40). Площадь треугольника $BDC$ равна половине площади параллелограмма $ABCD$, то есть равна $\frac{1}{2}$. Найдем площадь треугольника $BOM$.

Из подобия треугольников $BOM$ и $DOA$ получаем, что $\frac{BO}{OD} = \frac{BM}{AD} = \frac{1}{2}$, откуда $\frac{BO}{BD} = \frac{1}{3}$. Далее согласно третьей лемме о площадях имеем:

$$\frac{S_{\Delta BOM}}{S_{\Delta BDC}} = \frac{BO}{BD} \cdot \frac{BM}{BC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

откуда $S_{\Delta BOM} = \frac{1}{12}$. Значит, $S_{OMCD} = S_{\Delta BDC} - S_{\Delta BOM} = \frac{5}{12}$.

Ответ: 5/12.

**Пример 2.** В треугольнике $ABC$ на стороне $AB$ взята точка $K$ так, что $AK : KB = 1 : 2$, а на стороне $BC$ взята точка $L$ так, что $CL : LB = 2 : 1$. Пусть $Q$ — точка пересечения прямых $AL$ и $CK$. Найти площадь треугольника $ABC$, зная, что площадь треугольника $QBC$ равна 1.

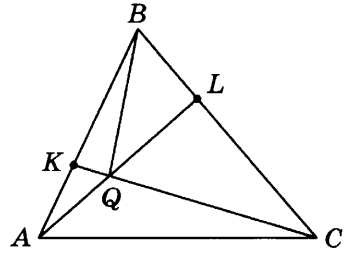


Рис. 41

*Решение.* Пусть $AK = x$, $BL = y$. Тогда $KB = 2x$, $LC = 2y$ и, значит, $AB = 3x$ и $BC = 3y$ (рисунок 41). Применим к треугольнику $BAL$ и секущей $KQ$ теорему Менелая. Имеем:

$$\frac{BK}{KA} \cdot \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{LC}{CB} = 1,$$

откуда $\frac{AQ}{QL} = \frac{3}{4}$ и $\frac{AL}{QL} = \frac{7}{4}$. Далее, применив к треугольникам $ABC$ и $QBC$ вторую лемму о площадях, получим:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta QBC}} = \frac{AL}{QL} = \frac{7}{4},$$

следовательно, $S_{\Delta ABC} = \frac{7}{4} \cdot S_{\Delta QBC} = \frac{7}{4}$.

Ответ: 7/4.

**Пример 3.** Площадь трапеции $ABCD$ равна 30. Точка $P$ — середина боковой стороны $AB$. Точка $R$ на боковой стороне $CD$ выбрана так, что $CD : RD = 3 : 2$. Прямые $AR$ и $PD$ пересекаются в точке $Q$. Найти площадь треугольника $APQ$, если $AD = 2BC$.

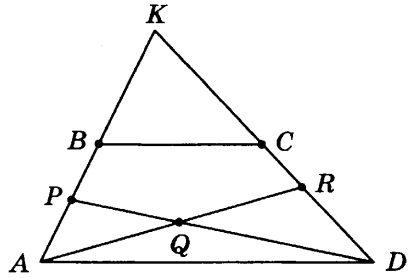


Рис. 42

*Решение.* Пусть $K$ — точка пересечения прямых $AB$ и $CD$. Тогда треугольник $AKD$ подобен треугольнику $BKC$ и коэффициент подобия равен $AD : BC = 2$ (рисунок 42). Значит, площадь треугольника $AKD$ в четыре раза больше площади треугольника $BKC$. Так как разность площадей треугольников $AKD$ и $BKC$ равна площади трапеции $ABCD$ и равна 30, то $S_{\Delta AKD} = 40$ и $S_{\Delta BKC} = 10$.

Пусть $CD = 3x$, тогда из условия $CD : RD = 3 : 2$ находим, что $RD = 2x$ и $CR = x$; кроме того, $KC = CD = 3x$. Пусть $AP = y$, тогда $PB = y$ и $BK = 2y$. Применим к треугольнику $KDP$ и секущей $RQ$ теорему Менелая. Имеем:

$$\frac{KR}{RD} \cdot \frac{DQ}{QP} \cdot \frac{PA}{AK} = 1,$$

откуда $\frac{DQ}{QP} = 2$ и $\frac{PQ}{PD} = \frac{1}{3}$. Применив теперь первую лемму о площадях к треугольникам $APQ$ и $APD$, а также к треугольникам $APD$ и $AKD$, получим, что

$$\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta APD}} = \frac{PQ}{PD} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{S_{\Delta APD}}{S_{\Delta AKD}} = \frac{AP}{AK} = \frac{1}{4},$$

следовательно,

$$\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta AKD}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Значит, $S_{\Delta APQ} = 40 \cdot \frac{1}{12} = \frac{10}{3}$.

Ответ: 10/3.

**Пример 4.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке $O$. Площади треугольников $BOC$, $COD$ и $AOD$ равны соответственно 20, 40 и 60. Найти угол $BAO$, если известно, что $AB = 15$, $AO = 8$, а угол $BOA$ больше 31°.

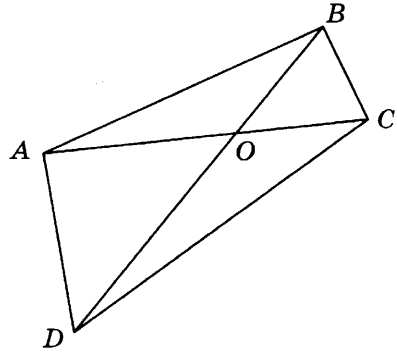


Рис. 43

*Решение.* Применим к треугольникам $BAO$ и $BOC$, а также к треугольникам $AOD$ и $COD$ первую лемму о площадях:

$$\frac{S_{\Delta BAO}}{S_{\Delta BOC}} = \frac{AO}{OC} = \frac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta COD}} \Rightarrow \frac{S_{\Delta BAO}}{20} = \frac{60}{40},$$

откуда $S_{\Delta BAO} = 30$ (рисунок 43). С другой стороны, $S_{\Delta BAO} = \frac{1}{2} AB \cdot AO \cdot \sin\angle BAO = 60 \cdot \sin\angle BAO$, откуда

$\sin\angle BAO = \frac{1}{2}$. Значит, $\angle BAO = 30°$ или $\angle BAO = 150°$.

Если угол $BAO$ равен 150°, то, согласно теореме о сумме углов треугольника, угол $BOA$ должен быть меньше 30°, что противоречит условию задачи. Следовательно, $\angle BAO = 30°$.

Ответ: 30°.

**Пример 5.** На боковой стороне $AB$ трапеции $ABCD$ взята такая точка $M$, что $AM : MB = 2 : 3$. На противоположной стороне $CD$ взята такая точка $N$, что отрезок $MN$ делит трапецию на части, одна из которых по площади втрое больше другой. Найти отношение $CN : ND$, если $BC : AD = 1 : 2$.

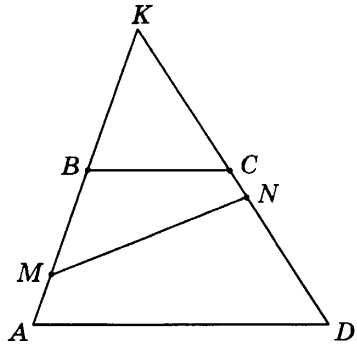


Рис. 44

*Решение.* Пусть $K$ — точка пересечения прямых $AB$ и $CD$. Тогда из условия задачи следует, что $BC$ — средняя линия треугольника $AKD$. Пусть $AM = 2x$, $MB = 3x$, тогда $BK = 5x$. Обозначив теперь $DN = z$ и $CN : ND = k$, получим, что $CN = kz$, а $CK = (k + 1)z$ (рисунок 44). Рассмотрим два случая.

1) Пусть сначала площадь четырехугольника $AMND$ в три раза больше площади четырехугольника $MBCN$. Пусть $S_{MBCN} = S$, тогда $S_{AMND} = 3S$. Так как отношение площадей подобных треугольников $AKD$ и $BKC$ равно 4, а их разность равна $4S$, то $S_{\Delta BKC} = \frac{4}{3}S$, а $S_{\Delta MKN} = S + \frac{4}{3}S = \frac{7}{3}S$. Применим к этим двум треугольникам третью лемму о площадях:

$$\frac{S_{\Delta BKC}}{S_{\Delta MKN}} = \frac{\frac{4}{3}S}{\frac{7}{3}S} = \frac{4}{7} = \frac{KB}{KM} \cdot \frac{KC}{KN} = \frac{5}{8} \cdot \frac{k+1}{2k+1},$$

откуда $k = \frac{3}{29}$.

2) Пусть теперь $S_{MBCN} = 3S$ и $S_{AMND} = S$. Тогда $S_{\Delta BKC} = \frac{4}{3}S$ и $S_{\Delta MKN} = \frac{13}{3}S$. Снова применив к треугольникам $BKC$ и $MKN$ третью лемму о площадях, получим:

$$\frac{S_{\Delta BKC}}{S_{\Delta MKN}} = \frac{\frac{4}{3}S}{\frac{13}{3}S} = \frac{4}{13} = \frac{KB}{KM} \cdot \frac{KC}{KN} = \frac{5}{8} \cdot \frac{k+1}{2k+1},$$

откуда $k = -33$, т.е. точка $N$ не лежит между точками $C$ и $D$, поэтому этот случай не имеет места.

Ответ: 3/29.

**Пример 6.** Точка $F$ лежит на продолжении стороны $BC$ параллелограмма $ABCD$ за точку $C$. Отрезок $AF$ пересекает диагональ $BD$ в точке $E$ и сторону $CD$ в точке $G$. Известно, что отрезок $AE$ на 1 длиннее отрезка $EG$, а отрезок $GF$ равен 3. Какую часть площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь треугольника $ADE$?

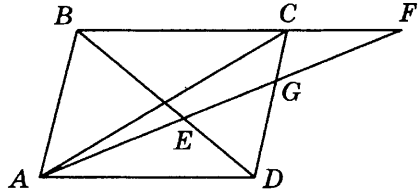


Рис. 45

*Решение.* Пусть $EG = x$, тогда согласно условию задачи $AE = x + 1$ (рисунок 45). Рассмотрим две пары подобных треугольников. Из подобия треугольников $BEF$ и $DEA$ получаем соотношение

$$\frac{EF}{AE} = \frac{BF}{AD} \Leftrightarrow \frac{x+3}{x+1} = \frac{BF}{AD}.$$

Треугольник $CGF$ подобен треугольнику $DGA$. Имеем:

$$\frac{GF}{AG} = \frac{CF}{AD} \Leftrightarrow \frac{3}{2x+1} = \frac{CF}{AD}.$$

Далее

$$\frac{BF}{AD} - \frac{CF}{AD} = \frac{BC}{AD} = 1 \Rightarrow \frac{x+3}{x+1} - \frac{3}{2x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Значит, $EG = 1$, $AE = 2$ и $AG = GF = 3$. Следовательно, из подобия треугольников $ADG$ и $FCG$ заключаем, что $G$ — середина $CD$. Применив теперь первую лемму о площадях к треугольникам $ADG$ и $ADC$, а также к треугольникам $ADE$ и $ADG$, получим:

$$\frac{S_{\Delta ADG}}{S_{\Delta ADC}} = \frac{DG}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{\Delta ADG}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ADG}} = \frac{AE}{AG} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{S_{\Delta ADE}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

Ответ: 1/6.

**Пример 7.** В треугольнике $ABC$, площадь которого равна 2, на медианах $AK$, $BL$ и $CN$ взяты соответственно точки $P$, $Q$ и $R$ так, что $AP = PK$, $BQ : QL = 1 : 2$, а $CR : RN = 5 : 4$. Найти площадь треугольника $PQR$.

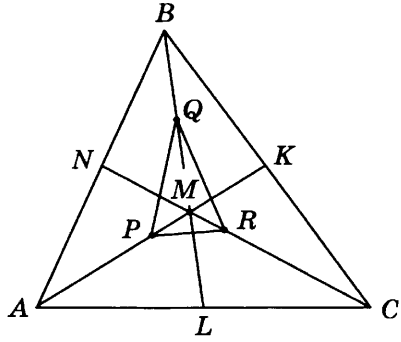


Рис. 46

*Решение.* Пусть $M$ — точка пересечения медиан треугольника $ABC$. Так как $AM : MK = 2 : 1$, то $AM = \frac{2}{3}AK$, а так как $AP = PK$, то $AP = \frac{1}{2}AK$ и $MP = AM - AP = \frac{1}{6}AK$ (рисунок 46). Значит, если $MP = x$, то $AP = 3x$ и $AM = 4x$. Так как $BM : ML = 2 : 1$, а $BQ : QL = 1 : 2$, то $BQ = QM = ML = y$, а $BM = 2y$. Так как $CM : MN = 2 : 1$, то $CM = \frac{2}{3}CN$, а так как $CR : RN = 5 : 4$, то $CR = \frac{5}{9}CN$ и $MR = CM - CR = \frac{1}{9}CN$. Значит, если $MR = z$, то $CR = 5z$ и $CM = 6z$.

Применим к треугольникам $PMQ$ и $AMB$, треугольникам $QMR$ и $BMC$, а также к треугольникам $PMR$ и $AMC$ третью лемму о площадях:

$$\frac{S_{\Delta PMQ}}{S_{\Delta AMB}} = \frac{MP}{MA} \cdot \frac{MQ}{MB} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow S_{\Delta PMQ} = \frac{1}{8} S_{\Delta AMB},$$

$$\frac{S_{\Delta QMR}}{S_{\Delta BMC}} = \frac{MQ}{MB} \cdot \frac{MR}{MC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \Rightarrow S_{\Delta QMR} = \frac{1}{12} S_{\Delta BMC},$$

$$\frac{S_{\Delta PMR}}{S_{\Delta AMC}} = \frac{MP}{MA} \cdot \frac{MR}{MC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24} \Rightarrow S_{\Delta PMR} = \frac{1}{24} S_{\Delta AMC}.$$

Так как $S_{\Delta AMB} = S_{\Delta BMC} = S_{\Delta AMC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}$, а $S_{\Delta PQR} = S_{\Delta PMQ} + S_{\Delta QMR} + S_{\Delta PMR}$, то

$$S_{\Delta PQR} = \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{36} + \frac{1}{72}\right) S_{\Delta ABC} = \frac{1}{12} S_{\Delta ABC}.$$

Поскольку $S_{\Delta ABC} = 2$, то $S_{\Delta PQR} = \frac{1}{6}$.

Ответ: 1/6.

**Пример 8.** Найти площадь трапеции $ABCD$, если длина ее боковой стороны $BC$ равна 5, а расстояния от вершин $A$ и $D$ до прямой $BC$ равны 3 и 7 соответственно.

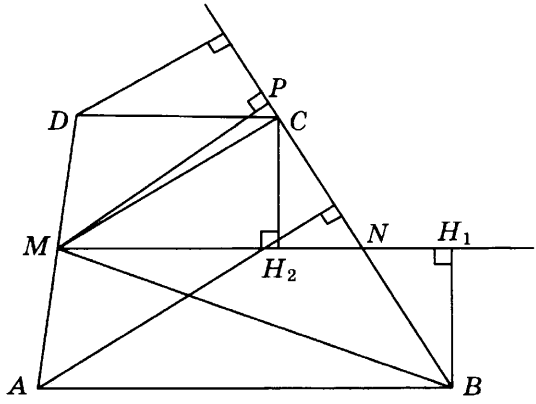


Рис. 47

*Решение.* Пусть $MN$ — средняя линия трапеции ($M$ принадлежит $AD$). Докажем, что площадь треугольника $MBC$ равна половине площади трапеции $ABCD$ (рисунок 47). Для этого проведем перпендикуляры $BH_1$ и $CH_2$ к прямой $MN$. Тогда $BH_1 = CH_2 = \frac{h}{2}$, где $h$ — высота трапеции. Площадь трапеции равна $S_{ABCD} = MN \cdot h$, а площадь треугольника $MBC$ равна

$$S_{\Delta MBC} = S_{\Delta MBN} + S_{\Delta MCN} = \frac{1}{2} MN \cdot BH_1 + \frac{1}{2} MN \cdot CH_2 =$$

$$= \frac{1}{2} MN \left( \frac{h}{2} + \frac{h}{2} \right) = \frac{1}{2} MN \cdot h,$$

то есть половине площади трапеции $ABCD$, что и требовалось доказать.

Проведем перпендикуляр $MP$ из точки $M$ к прямой $BC$. Так как $M$ — середина $AD$, то длина отрезка $MP$ равна полусумме расстояний от точек $A$ и $D$ до прямой $BC$, то есть равна 5. Следовательно, $S_{\Delta MBC} = \frac{1}{2} BC \cdot MP = 12,5$ и $S_{ABCD} = 25$.

Ответ: 25.

**Пример 9.** Из точки $O$, которая расположена внутри остроугольного треугольника $ABC$, опущены перпендикуляры на стороны. Длины сторон и опущенных на них перпендикуляров соответственно равны $a$ и $k$, $b$ и $m$, $c$ и $n$. Вычислить отношение площади треугольника $ABC$ к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.

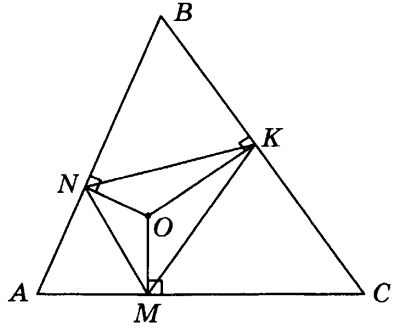


Рис. 48

*Решение.* Пусть $OK$, $OM$, $ON$ — перпендикуляры к сторонам $BC$, $CA$ и $AB$ соответственно, $BC = a$, $OK = k$, $CA = b$, $OM = m$, $AB = c$, $ON = n$ (рисунок 48). Рассмотрим треугольник $OKM$. Его площадь равна

$$S_{\Delta OKM} = \frac{1}{2} OK \cdot OM \cdot \sin \angle KOM = \frac{1}{2} km \sin(180^\circ - \gamma) = \frac{1}{2} km \sin \gamma,$$

где $\gamma = \angle BCA$. Тогда $\dfrac{S_{\Delta OKM}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2}km\sin\gamma}{\frac{1}{2}ab\sin\gamma} = \dfrac{km}{ab}$. Аналогично

$\dfrac{S_{\Delta ONK}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{nk}{ca}$ и $\dfrac{S_{\Delta OMN}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{mn}{bc}$. Имеем:

$$\frac{S_{\Delta KMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta OKM} + S_{\Delta ONK} + S_{\Delta OMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{km}{ab} + \frac{nk}{ca} + \frac{mn}{bc} = \frac{kmc + nkb + mna}{abc},$$

откуда искомое отношение равно $\dfrac{abc}{kmc + nkb + mna}$.

Ответ: $\dfrac{abc}{kmc + nkb + mna}$.

**Пример 10.** В треугольнике $KLM$ отношение радиусов описанной и вписанной окружностей равно 3. Вписанная окружность касается сторон треугольника $KLM$ в точках $A$, $B$ и $C$. Найти отношение площади треугольника $KLM$ к площади треугольника $ABC$.

*Решение.* Пусть $k$, $l$ и $m$ — длины сторон треугольника $KLM$. Согласно предыдущей задаче имеем:

$$\frac{S_{\Delta KLM}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{klm}{r^2(k+l+m)} = \frac{4RS}{2r^2p} = \frac{4Rr}{2r^2} = \frac{2R}{r} = 6$$

(все обозначения для треугольника $KLM$ стандартные). Здесь были использованы формулы $S = \dfrac{klm}{4R} \Rightarrow klm = 4RS$ и $S = pr \Rightarrow \dfrac{S}{p} = r$.

Ответ: 6.

**Пример 11.** В трапецию $ABCD$ вписан параллелограмм $KLMN$ так, что вершины $L$ и $N$ лежат на основаниях $BC$ и $AD$, а вершины $K$ и $M$ — на сторонах $AB$ и $CD$ соответственно, причем $AK : KB = 1 : 4$ и $AN : BL : LC = 4 : 2 : 3$. Найти отношение площадей трапеции и параллелограмма.

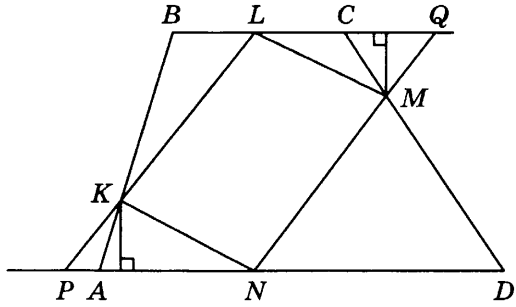


Рис. 49

*Решение.* Стороны $LM$ и $NK$ параллелограмма имеют равную длину и наклонены к основаниям трапеции под одинаковым углом, следовательно, равны расстояниям от точек $M$ и $K$ до прямых $BC$ и $AD$ соответственно. Так как $AK : AB = 1 : 5$, то каждое из этих расстояний составляет $1/5$ часть высоты трапеции (рисунок 49). Это означает, что $CM : CD = 1 : 5$ и $CM : MD = 1 : 4$. Пусть прямая $KL$ пересекает прямую $AD$ в точке $P$, а прямая $MN$ пересекает прямую $BC$ в точке $Q$. Тогда $PLQN$ — параллелограмм. Пусть также $AN = 4x$, $BL = 2x$, $LC = 3x$.

Треугольники $AKP$ и $BKL$ подобны, поэтому $\frac{PA}{LB} = \frac{AK}{BK} = \frac{1}{4}$, откуда $PA = \frac{x}{2}$. Тогда $PN = \frac{9x}{2}$ и $LQ = \frac{9x}{2}$. Это означает, что $QC = \frac{3x}{2}$. Треугольники $CMQ$ и $DMN$ подобны, следовательно $\frac{QC}{ND} = \frac{CM}{DM} = \frac{1}{4}$ и $ND = 6x$. Параллелограмм $PLQN$ и трапеция $ABCD$ имеют общую высоту, поэтому их площади относятся как суммы длин оснований, то есть как $3 : 5$. Параллелограммы $KLMN$ и $PLQN$ также имеют общую высоту, поэтому их площади относятся как длины оснований, то есть как $4 : 5$. Имеем:

$$S_{KLMN} = \frac{4}{5} S_{PLQN} = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5} S_{ABCD}\right) = \frac{12}{25} S_{ABCD},$$

то есть искомое отношение равно $25 : 12$.

Ответ: $25/12$.

**Пример 12.** В трапеции $KLMN$ основания $LM$ и $KN$ равны 2 и 8 соответственно. Из точки $E$, лежащей на стороне $MN$, опущен перпендикуляр $EF$ на сторону $KL$. Известно, что $F$ — середина стороны $KL$, $FM = 3$ и что площадь четырехугольника $KFEN$ в четыре раза больше площади четырехугольника $LFEM$. Найти длину отрезка $FN$.

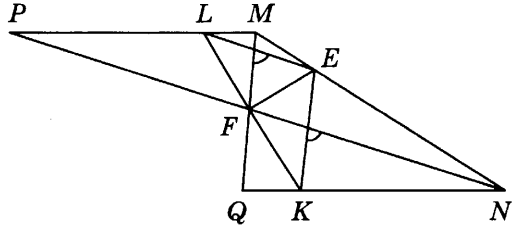


Рис. 50

*Решение.* Треугольники $KFN$ и $LFM$ имеют одинаковую высоту (проведенную из вершины $F$), поэтому их площади относятся как длины оснований $KN$ и $LM$, то есть как 4 : 1. Следовательно, площади треугольников $FEN$ и $FEM$ также относятся как 4 : 1 (рисунок 50). Тогда согласно первой лемме о площадях $EN : EM = 4 : 1$. Пусть прямая $FN$ пересекает прямую $LM$ в точке $P$, а прямая $FM$ пересекает прямую $KN$ в точке $Q$. Тогда $PL = 8$ и $QK = 2$. Докажем, что $FN \parallel LE$ и $FM \parallel KE$.

Так как $ML : LP = ME : EN = 1 : 4$, то из теоремы, обратной теореме Фалеса, следует, что прямые $FN$ и $LE$ параллельны. Аналогично $NK : KQ = NE : EM = 4 : 1$. Отсюда вытекает параллельность прямых $FM$ и $KE$. Поскольку $FE$ — серединный перпендикуляр к отрезку $KL$, то $EK = EL$. Площадь четырехугольника $KFEN$ равна половине произведения его диагоналей на $\sin\alpha$, где $\alpha$ — угол между этими диагоналями. Точно так же, площадь четырехугольника $LFEM$ равна половине произведения его диагоналей на $\sin\alpha$ (угол $\alpha$ тот же самый). Имеем:

$$4 = \frac{S_{KFEN}}{S_{LFEM}} = \frac{\frac{1}{2} FN \cdot EK \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2} FM \cdot EL \cdot \sin\alpha} = \frac{FN}{FM},$$

откуда $FN = 12$.

Ответ: 12.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**1.** Дан треугольник $ABC$, в котором угол $B$ равен $30°$, $AB = 4$ и $BC = 6$. Биссектриса угла $B$ пересекает сторону $AC$ в точке $D$. Определить площадь треугольника $ABD$.

**2.** В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB$ равна 6, а высота, проведенная к основанию $AD$, равна 3. Биссектриса угла $BAD$ пересекает сторону $BC$ в точке $M$ так, что $MC = 4$. Пусть $N$ — точка пересечения биссектрисы $AM$ и диагонали $BD$. Вычислить площадь треугольника $BNM$.

**3.** Точки $P$ и $Q$ расположены на стороне $BC$ треугольника $ABC$ так, что $BP : PQ : QC = 1 : 2 : 3$. Точка $R$ делит сторону $AC$ этого треугольника так, что $AR : RC = 1 : 2$. Чему равно отношение площади четырехугольника $PQST$ к площади треугольника $ABC$, где $S$ и $T$ — точки пересечения прямой $BR$ с прямыми $AQ$ и $AP$ соответственно?

**4.** На сторонах $AB$, $BC$ и $AD$ параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки $K$, $M$ и $L$ таким образом, что $AK : KB = 2 : 1$, $BM : MC = 1 : 1$, $AL : LD = 1 : 3$. Найти отношение площадей треугольников $KBL$ и $BML$.

**5.** Высота трапеции $ABCD$ равна 7, а длины оснований $AD$ и $BC$ равны соответственно 8 и 6. Через точку $E$, лежащую на стороне $CD$, проведена прямая $BE$, которая делит диагональ $AC$ в точке $O$ в отношении $AO : OC = 3 : 2$. Найти площадь треугольника $OEC$.

**6.** В параллелограмме $ABCD$ на диагонали $AC$ взята точка $E$ так, что длина $AE$ составляет треть длины $AC$, а на стороне $AD$ взята точка $F$ так, что длина $AF$ составляет четверть длины $AD$. Найти площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что площадь четырехугольника $ABGE$ (где $G$ — точка пересечения прямой $FE$ со стороной $BC$) равна 8.

**7.** В треугольнике $ABC$ точка $D$ лежит на $AC$, причем $AD = 2DC$. Точка $E$ лежит на $BC$. Площадь треугольника $ABD$ равна 3, площадь треугольника $AED$ равна 1. Отрезки $AE$ и $BD$ пересекаются в точке $O$. Найти отношение площадей треугольников $ABO$ и $OED$.

**8.** Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ ($AD > BC$) равна 48, а площадь треугольника $AOB$, где $O$ — точка пересечения диагоналей трапеции, равна 9. Найти отношение оснований трапеции $AD : BC$.

**9.** В треугольнике $ABC$, площадь которого равна $S$, проведена биссектриса $CE$ и медиана $BD$, пересекающиеся в точке $O$. Найти площадь четырехугольника $ADOE$, зная, что $BC = a$, $AC = b$.

**10.** В треугольнике $ABC$ угол $A$ равен 45°, а угол $C$ — острый. Из середины $M$ стороны $BC$ опущен перпендикуляр $MN$ на сторону $AC$. Площади треугольников $NMC$ и $ABC$ относятся соответственно как 1 : 8. Найти углы треугольника $ABC$.

**11.** Точки $E$, $F$, $M$ расположены соответственно на сторонах $AB$, $BC$, $AC$ треугольника $ABC$. Отрезок $AE$ составляет 1/3 стороны $AB$, отрезок $BF$ составляет 1/6 стороны $BC$, отрезок $AM$ составляет 2/5 стороны $AC$. Найти отношение площади треугольника $EFM$ к площади треугольника $ABC$.

**12.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка $E$ — пересечение диагоналей. Известно, что площадь каждого из треугольников $ABE$ и $DCE$ равна 1, площадь всего четырехугольника не превосходит 4 и $AD = 3$. Найти сторону $BC$.

**13.** На стороне $AB$ треугольника $ABC$ взята точка $E$, а на стороне $BC$ — точка $D$ так, что длина отрезка $AE$ равна 2, а длина отрезка $CD$ равна 1. Прямые $AD$ и $CE$ пересекаются в точке $O$. Найти площадь четырехугольника $BDOE$, если длина каждой из сторон $AB$ и $BC$ равна 8, а длина стороны $AC$ равна 6.

**14.** Внутри прямоугольного треугольника $ABC$ (угол $B$ прямой) взята точка $D$ так, что площади треугольников $ABD$ и $BDC$ соответственно в три и четыре раза меньше площади треугольника $ABC$. Длины отрезков $AD$ и $DC$ равны соответственно $a$ и $c$. Найти длину отрезка $BD$.

**15.** Точки $K$, $L$, $M$ делят стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ в отношении $AK : BK = CL : BL = CM : DM = 1 : 2$. Известно, что радиус описанной около треугольника $KLM$ окружности равен $5/2$, $KL = 4$, $LM = 3$ и $KM < KL$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

**16.** В трапеции $ABCD$ с основаниями $BC$ и $AD$ диагонали пересекаются в точке $M$, $BC = b$, $AD = a$. Найти отношение площади треугольника $ABM$ к площади трапеции $ABCD$.

**17.** В треугольнике $ABC$ биссектриса $BB_1$ пересекает медиану $AA_1$ в точке $O$. Найти отношение площади треугольника $BOA_1$ к площади треугольника $AOB_1$, если $AB : AC = 1 : 4$.

**18.** В прямоугольном треугольнике $FGH$ с прямым углом при вершине $G$ известно, что $FG = 8$, $GH = 2$. Точка $D$ лежит на стороне $FH$, $A$ и $B$ — точки пересечения медиан треугольников $FGD$ и $DGH$ соответственно. Найти площадь треугольника $GAB$.

**19.** В треугольнике $ABC$ площадью 12 на стороне $BC$ взята точка $N$ так, что $NC : BC = 3 : 4$. Медиана $AM$ пересекает медиану $BL$ в точке $D$, а прямую $LN$ — в точке $E$. Найти площадь четырехугольника $BDEN$.

**20.** Точки $M$, $K$ и $N$ лежат на сторонах $AB$, $BC$ и $AC$ треугольника $ABC$ соответственно, причем $AMKN$ — параллелограмм, площадь которого составляет $4/9$ площади треугольника $ABC$. Найти диагональ $MN$ параллелограмма, если известно, что $AB = 21$, $AC = 12$ и $\angle BAC = 120°$.

**21.** Через вершину $B$ правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая диагональ $CF$ в точке $K$. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $1 : 2$. Найти отношение $CK : KF$.

**22.** На основании $AC$ равнобедренного треугольника $ABC$ взята точка $E$, а на боковых сторонах $AB$ и $BC$ точки $D$ и $F$ соответственно так, что $DE \parallel BC$ и $EF \parallel AB$. Какую часть площади треугольника $ABC$ занимает площадь треугольника $DEF$, если $BF : EF = 1 : 3$?

**23.** Через вершину трапеции проведены две прямые. Одна из них проходит также через противоположную вершину трапеции и делит отрезок, соединяющий середины ее оснований, в отношении 3 : 1. В каком отношении делит этот отрезок другая прямая, делящая площадь трапеции пополам?

**24.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $O$. Сумма площадей треугольников $AOB$ и $COD$ равна сумме площадей треугольников $BOC$ и $AOD$, а площадь треугольника $BOC$ вдвое больше, чем площадь треугольника $AOB$. Медианы $BK$ и $BL$ треугольников $ABD$ и $DBC$ пересекают отрезок $AC$ в точках $M$ и $N$ соответственно. Найти $KL$, если $NC = 4$.

**25.** В трапеции $ABCD$ основание $CD$ в два раза больше основания $AB$. На боковых сторонах $AD$ и $BC$ выбраны точки $P$ и $Q$ так, что $DP : PA = 2 : 1$, $BQ : QC = 3 : 4$. Найти отношение площадей четырехугольников $ABQP$ и $CDPQ$.

**26.** В трапецию $ABCD$ вписан параллелограмм $KLMN$ так, что вершины $L$ и $N$ лежат на основаниях $BC$ и $AD$, а вершины $K$ и $M$ — на сторонах $AB$ и $CD$ соответственно, причем $AK : KB = 2 : 3$ и $BL : LC = 7 : 5$. Найти отношение площадей треугольников $BKL$ и $CLM$.

## § 6. УГЛЫ В ОКРУЖНОСТЯХ

В данном параграфе мы дадим определение угловой величины дуги окружности, не использующее понятие центрального угла. Итак, угловой величиной дуги окружности назовем отношение длины этой дуги к длине окружности, умноженное на $2\pi$. Легко понять, что определенная таким образом угловая величина дуги как раз равна величине центрального угла (выраженной в радианах), который стягивает данную дугу. Однако наше определение позволяет обойтись без дополнительного построения центрального угла. Сформулируем несколько утверждений, позволяющих выражать углы, связанные с окружностью, через дуги этой окружности.

**Теорема 1.** Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается. Значит, вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, или на равные дуги одной окружности, равны.

**Теорема 2.** Угол между касательной и хордой, выходящими из одной точки окружности, измеряется половиной угловой величины дуги, заключенной внутри этого угла.

**Теорема 3.** Угол, вершина которого расположена вне круга, измеряется полуразностью угловых величин дуг окружности этого круга, заключенных внутри угла.

**Теорема 4.** Угол, вершина которого расположена внутри круга, измеряется полусуммой угловых величин дуг, которые высекают из окружности круга стороны угла и их продолжения.

**Теорема 5.** Сумма противоположных углов четырехугольника, вписанного в окружность, равна $\pi$, и наоборот, если сумма противоположных углов выпуклого четырехугольника равна $\pi$, то вокруг этого четырехугольника можно описать окружность.

**Теорема 6.** Произведения длин отрезков двух пересекающихся хорд равны.

**Теорема 7.** Произведение длины отрезка секущей на длину ее внешней части есть величина постоянная для любой секущей, проведенной к окружности из данной точки, и равна квадрату длины касательной, проведенной к окружности из той же точки.

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ $AC$ является биссектрисой угла $BAD$ и пересекается с диагональю $BD$ в точке $K$. Найти длину отрезка $KC$, если $BC = 4$, а $AK = 6$.

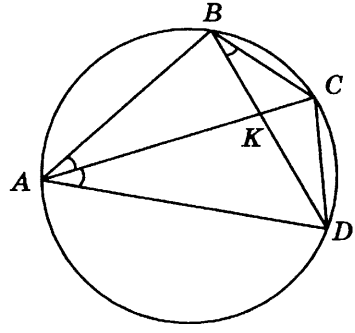


Рис. 51

*Решение.* Так как $AC$ — биссектриса угла $BAD$, то угол $BAC$ равен углу $CAD$ (рисунок 51). С другой стороны, углы $CAD$ и $CBD$ равны (как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу). Значит, угол $BAC$ равен углу $CBK$. Следовательно, треугольник $ABC$ подобен треугольнику $BKC$ (по двум углам). Имеем:

$$\frac{BC}{KC} = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \frac{4}{KC} = \frac{6 + KC}{4} \Rightarrow KC = 2.$$

Ответ: 2.

**Пример 2.** Из вершины тупого угла $A$ треугольника $ABC$ опущена высота $AD$. Из точки $D$ радиусом, равным $AD$, описана окружность, пересекающая стороны треугольника

$AB$ и $AC$ в точках $M$ и $N$ соответственно. Вычислить длину стороны $AC$, если заданы длины отрезков $AB = c$, $AM = n$ и $AN = m$.

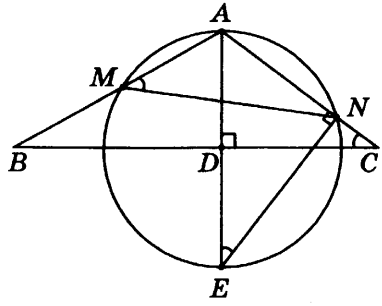


Рис. 52

*Решение.* Продолжим высоту $AD$ треугольника $ABC$ до пересечения с окружностью в точке $E$. Тогда $AE$ является диаметром окружности и угол $ANE$ — прямой (рисунок 52). Пусть $\angle AEN = \alpha$. Так как вписанные углы, опирающиеся в окружности на одну и ту же дугу, равны, то $\angle AMN = \alpha$. Далее из прямоугольного треугольника $AEN$ получаем, что $\angle EAN = 90° - \alpha$, а из прямоугольного треугольника $ADC$ находим, что $\angle ACD = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$. Следовательно, треугольник $ABC$ подобен треугольнику $ANM$ (по двум углам). Имеем:

$$\frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM} \Leftrightarrow \frac{c}{m} = \frac{AC}{n} \Leftrightarrow AC = \frac{nc}{m}.$$

Ответ: $\frac{nc}{m}$.

**Пример 3.** В окружности пересекающиеся хорды $AB$ и $CD$ перпендикулярны, $AD = m$, $BC = n$. Найти диаметр окружности.

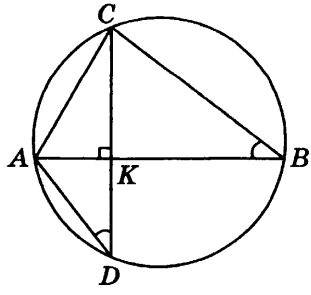


Рис. 53

*Решение.* Пусть $K$ — точка пересечения данных хорд (рисунок 53). Пусть угол $ABC$ равен $\beta$, тогда и $\angle ADC = \beta$ (как вписанный, опирающийся в окружности на ту же дугу). Рассмотрим треугольник $ADK$, в котором $AK = AD \cdot \sin\angle ADK = m\sin\beta$. Аналогично в треугольнике $CBK$ имеем: $CK = BC \cdot \sin\angle CBK = n\sin\beta$. Применив теперь теорему Пифагора к треугольнику $ACK$, получим, что:

$$AC = \sqrt{AK^2 + CK^2} = \sqrt{m^2 + n^2} \cdot \sin\beta.$$

Диаметр данной окружности будем искать как диаметр окружности, описанной около треугольника $ACD$, для чего применим к этому треугольнику теорему синусов:

$$2R = \frac{AC}{\sin\angle ADC} = \frac{\sqrt{m^2 + n^2} \cdot \sin\beta}{\sin\beta} = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Ответ: $\sqrt{m^2 + n^2}$.

**Пример 4.** Вершины $B$, $C$, $D$ четырехугольника $ABCD$ расположены на окружности с центром $O$, которая пересекает сторону $AB$ в точке $F$, а сторону $AD$ — в точке $E$. Известно, что угол $BAD$ прямой, длина хорды $EF$ равна длине хорды $FB$ и длины хорд $BC$, $CD$, $ED$ равны между собой. Найти угол $ABO$.

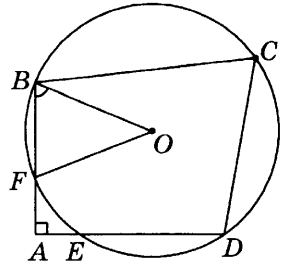


Рис. 54

*Решение.* Так как равные хорды окружности стягивают равные дуги, то $\overset{\smile}{EF} = \overset{\smile}{FB} = \omega_1$ и $\overset{\smile}{BC} = \overset{\smile}{CD} = \overset{\smile}{DE} = \omega_2$ (рисунок 54). Поскольку угол, вершина которого находится вне круга, измеряется полуразностью угловых величин дуг окружности этого круга, заключенных внутри угла, имеем:

$$\angle BAD = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{BD} - \overset{\smile}{EF}\right) = \frac{2\omega_2 - \omega_1}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\omega_2 - \omega_1 = \pi.$$

С другой стороны, так как дуги $BF$, $FE$, $BC$, $CD$ и $DE$ составляют в сумме всю окружность, верно равенство $2\omega_1 + 3\omega_2 = 2\pi$. Из этих двух равенств находим $\omega_1 = \frac{\pi}{7}$. Но угловая величина дуги равна также и величине центрального угла, который определяет на окружности эту дугу. Поэтому $\angle BOF = \frac{\pi}{7}$, а так как треугольник $BOF$ — равнобедренный, то

$$\angle ABO = \angle FBO = \frac{\pi - \angle BOF}{2} = \frac{3\pi}{7}.$$

Ответ: $3\pi / 7$.

**Пример 5.** В треугольнике $ABC$ проведена средняя линия $MN$, параллельная $AC$. Окружность, проходящая через точки $M$, $N$ и $C$, касается стороны $AB$, а ее радиус равен $R = \sqrt{2}$. Найти синус угла $ACB$, если $AC = 2$.

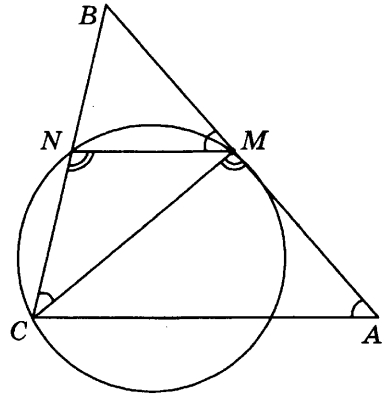


Рис. 55

*Решение.* Так как угол между касательной и хордой, выходящими из одной точки окружности, измеряется половиной угловой величины дуги, заключенной внутри этого угла, то $\angle BMN = \frac{1}{2}\overset{\smile}{MN}$ (рисунок 55). Поскольку величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается, то $\angle NCM = \frac{1}{2}\overset{\smile}{MN}$. Следовательно,

$\angle BMN = \angle NCM$. Аналогично угол $AMC$ равен углу $CNM$. Кроме того, так как прямые $MN$ и $AC$ параллельны, то равны углы $BAC$ и $BMN$. Значит, треугольник $AMC$ подобен треугольнику $CNM$ (по двум углам). Имеем:

$$\frac{AC}{CM} = \frac{CM}{MN} \Leftrightarrow CM^2 = AC \cdot MN = 2 \Rightarrow CM = \sqrt{2}.$$

В силу равенства $\angle ACB = \pi - \angle MNC$ получаем, что $\sin\angle ACB = \sin\angle CNM$. Треугольник $CNM$ вписан в окружность радиуса $R = \sqrt{2}$. Применим к этому треугольнику теорему синусов:

$$\sin\angle CNM = \frac{CM}{2R} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\angle ACB = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

**Пример 6.** Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность. Точка $P$ лежит на его стороне $KL$, причем $PM \parallel KN$ и $PN \parallel LM$. Найти длины отрезков $PK$ и $PL$, если $MN = 6$ и $KL = 13$.

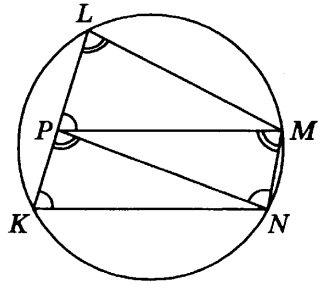


Рис. 56

*Решение.* Пусть $PK = x$, $PL = y$ (рисунок 56). Так как прямые $PM$ и $KN$ параллельны, то углы $PKN$ и $LPM$ равны. С другой стороны, $\angle PKN + \angle NML = 180°$ и $\angle MNP + \angle NML = 180°$, откуда $\angle PKN = \angle MNP$. Аналогично $\angle PLM = \angle KPN = \angle NMP$. Треугольники $PKN$ и $MNP$ подобны (по двум углам). Следовательно,

$$\frac{PK}{MN} = \frac{NP}{PM} \Leftrightarrow \frac{x}{6} = \frac{NP}{PM}.$$

Треугольники $PLM$ и $NMP$ также подобны (по двум углам). Это означает, что

$$\frac{PL}{NM} = \frac{MP}{PN} \Leftrightarrow \frac{y}{6} = \frac{MP}{PN}.$$

Перемножив почленно полученные два равенства, находим, что $\frac{xy}{36} = 1$, откуда $xy = 36$. Так как при этом $x + y = 13$, то либо $x = 9$, $y = 4$, либо $x = 4$, $y = 9$.

Ответ: $PK = 9$ и $PL = 4$ или $PK = 4$ и $PL = 9$.

**Пример 7.** В треугольнике $ABC$ имеем $AB = 20$, $AC = 24$. Известно, что вершина $C$, центр $O$ вписанного в треугольник $ABC$ круга и точка $D$ пересечения биссектрисы угла $A$ со стороной $BC$ лежат на окружности, центр которой находится на стороне $AC$. Найти радиус описанной около треугольника $ABC$ окружности.

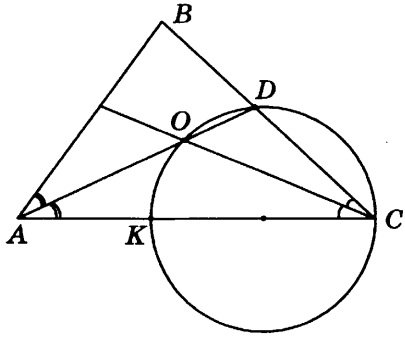


Рис. 57

*Решение.* Пусть $K$ — точка пересечения данной окружности со стороной $AC$ (рисунок 57). Обозначим угол $C$ треугольника $ABC$ через $\gamma$. Тогда $\angle KCO = \angle COD = \frac{\gamma}{2}$. Отсюда следует, что $\overset{\smile}{KO} = \overset{\smile}{OD} = \gamma$ и $\overset{\smile}{DC} = \pi - 2\gamma$. Поскольку угол, вершина которого находится вне круга, измеряется полуразностью угловых величин дуг окружности этого круга, заключенных внутри угла, имеем:

$$\angle CAD = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{DC} - \overset{\smile}{KO}\right) = \frac{\pi - 3\gamma}{2} \Rightarrow \angle CAB = \pi - 3\gamma.$$

Значит, $\angle ABC = \pi - \gamma - (\pi - 3\gamma) = 2\gamma$. Применив теперь к треугольнику $ABC$ теорему синусов, получим:

$$\frac{AB}{\sin\angle ACB} = \frac{AC}{\sin\angle ABC} \Leftrightarrow \frac{20}{\sin\gamma} = \frac{24}{\sin 2\gamma} \Leftrightarrow \frac{5}{\sin\gamma} = \frac{3}{\sin\gamma\cos\gamma},$$

откуда $\cos\gamma = \frac{3}{5}$ и $\sin\gamma = \frac{4}{5}$. Таким образом, $R = \frac{AB}{2\sin\gamma} = 12,5$.

Ответ: 12,5.

**Пример 8.** Две окружности, касающиеся прямой в точках $A$ и $B$, пересекаются в точках $C$ и $D$, причем $AB = 42$, $CD = 40$. Найти медиану треугольника $ABC$, проведенную из вершины $C$.

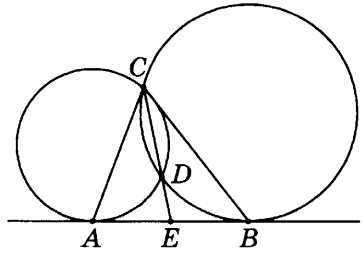


Рис. 58

*Решение.* Пусть прямая $CD$ пересекает прямую $AB$ в точке $E$, причем $D$ лежит между $C$ и $E$ (рисунок 58). Так как квадрат касательной, проведенной из данной точки к окружности, равен произведению секущей, проведенной из той же точки к той же окружности на ее внешнюю часть, имеем: $EA^2 = ED \cdot EC$ и $EB^2 = ED \cdot EC$, откуда $EA = EB = 21$ и $CE$ — медиана треугольника $ABC$. Пусть $DE = x$, тогда $21^2 = x(x + 40)$, поэтому $x = 9$ и $CE = 49$.

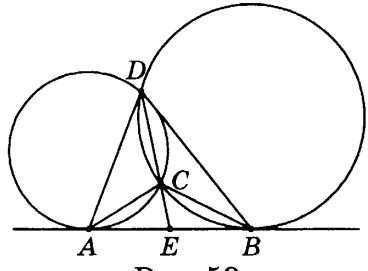


Рис. 59

Если же точка $C$ лежит между точками $D$ и $E$ (рисунок 59), то, повторяя предыдущее решение, находим, что $CE = 9$.

Ответ: 9 или 49.

**Пример 9.** Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке $A$. Прямая, проходящая через точку $A$, пересекает первую окружность в точке $B$, а вторую — в точке $C$. Касательная к первой окружности, проходящая через точку $B$, пересекает вторую окружность в точках $D$ и $E$ ($D$ лежит между $B$ и $E$). Известно, что $AB = 5$ и $AC = 4$. Найти длину отрезка $CE$.

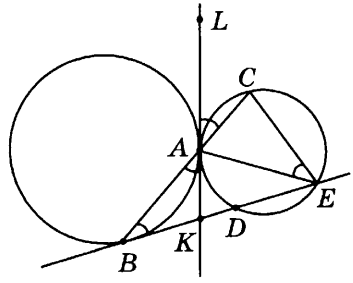


Рис. 60

*Решение.* Проведем через точку $A$ общую касательную к двум окружностям. Пусть эта касательная пересекает прямую $BE$ в точке $K$ (рисунок 60). Пусть $L$ — произвольная точка прямой $AK$ такая, что точка $A$ лежит между $K$ и $L$. Тогда $\angle ABK = \angle BAK = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AB}$. Углы $BAK$ и $CAL$ равны как вертикальные. Угол $CAL$ есть угол между касательной и хордой (второй окружности), поэтому $\angle CAL = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC}$. В этой же окружности угол $CEA$ является вписанным, поэтому $\angle CEA = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC} = \angle CAL$. Таким образом, $\angle CBE = \angle CEA$. Треугольники $CBE$ и $CEA$ подобны (по двум углам). Имеем:

$$\frac{CB}{CE} = \frac{CE}{CA} \Leftrightarrow CE^2 = CA \cdot CB = 36 \Rightarrow CE = 6.$$

Ответ: 6.

**Пример 10.** Через вершины $A$ и $B$ треугольника $ABC$ проведена окружность, касающаяся прямой $BC$, а через вершины $B$ и $C$ — другая окружность, касающаяся прямой $AB$. Продолжение общей хорды $BD$ этих окружностей пересекает отрезок $AC$ в точке $E$. Найти отношение $AE : EC$, если $AB = 5$ и $BC = 9$.

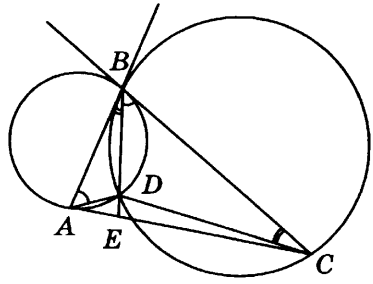


Рис. 61

*Решение.* Угол $BAD$ является вписанным в первую окружность, поэтому $\angle BAD = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BD}$ (рисунок 61). Угол $CBD$ есть угол между касательной и хордой (также первой окружности), поэтому $\angle CBD = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BD} = \angle BAD$. Аналогично, рассматривая вторую окружность, находим, что $\angle DCB = \angle DBA$. Треугольники $BAD$ и $CBD$ подобны (по двум углам). Из этого подобия, в частности, следует, что равны углы $ADB$ и $BDC$, поэтому равны углы $ADE$ и $EDC$, то есть $DE$ — биссектриса треугольника $ADC$.

Пусть $AD = x$, $CD = y$, $BD = z$. Имеем:

$$\frac{BA}{CB} = \frac{AD}{BD} = \frac{DB}{DC} \Leftrightarrow \frac{5}{9} = \frac{x}{z} = \frac{z}{y} \Rightarrow x = \frac{5}{9}z \quad \text{и} \quad y = \frac{9}{5}z.$$

Тогда согласно теореме о биссектрисе внутреннего угла получаем, что $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DC} = \frac{x}{y} = \frac{25}{81}$.

Ответ: 25/81.

**Пример 11.** Вокруг треугольника $ABC$ описана окружность. Медиана $AD$ продолжена до пересечения с этой окружностью в

точке $E$. Известно, что $AB + AD = DE$, угол $BAD$ равен 60° и $AE = 6$. Найти площадь треугольника $ABC$.

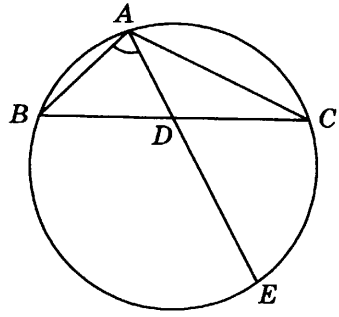


Рис. 62

*Решение.* Пусть $AB = x$, $AD = y$, тогда согласно условию задачи $DE = x + y$ (рисунок 62). Так как в окружности произведения отрезков двух пересекающихся хорд равны, имеем:

$$AD \cdot DE = BD \cdot DC \Rightarrow BD = DC = \sqrt{y(x+y)}.$$

Применим к треугольнику $ABD$ теорему косинусов:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \angle BAD \Leftrightarrow$$

$$y(x+y) = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = 2xy \Rightarrow x = 2y.$$

Условие $AE = 6$ дает равенство $x + 2y = 6$. Подставляя в него $x = 2y$, находим $y = \frac{3}{2}$, $x = 3$. Искомая площадь равна

$$S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD = \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

**Пример 12.** Точка $O$ — центр вписанной в тупоугольный треугольник $ABC$ окружности (угол $A$ — тупой). Продолжение отрезка $AO$ за точку $O$ пересекает описанную вокруг треугольника $ABC$ окружность в точке $D$. Найти угол $A$, если $OD = BC$.

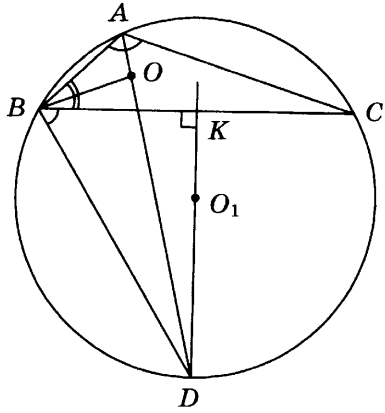


Рис. 63

*Решение.* Пусть $O_1$ — центр описанной около треугольника $ABC$ окружности. Так как $AD$ — биссектриса угла $BAC$, то $D$ — середина дуги $BC$ (рисунок 63). Следовательно, $DO_1$ есть серединный перпендикуляр к отрезку $BC$. Пусть этот перпендикуляр пересекает $BC$ в точке $K$. Тогда $BK = KC = x$, $OD = 2x$. Докажем, что треугольник $BOD$ — равнобедренный ($BD = OD$).

Обозначим $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$, $\angle ABO = \angle OBC = \beta$. Углы $DBC$ и $DAC$ равны (как вписанные, опирающиеся в окружности на одну и ту же дугу). Следовательно, $\angle OBD = \alpha + \beta$. С другой стороны, $\angle BOD = \alpha + \beta$ как внешний угол треугольника $AOB$. Это означает, что $\angle OBD = \angle BOD$ и $BD = OD = 2x$. Наконец, рассмотрим прямоугольный треугольник $BKD$, в котором $BK = x$ и $BD = 2x$. Из этого треугольника находим, что $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, то есть $\alpha = 60°$, и $\angle BAC = 2\alpha = 120°$.

Ответ: 120°.

**Пример 13.** Точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой. Отрезок $AB$ является диаметром первой окружности, а отрезок $BC$ — диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку $A$, пересекает первую окружность в точке $D$ и касается второй окружности в точке $E$, при этом $BD = 9$, $BE = 12$. Найти радиусы окружностей.

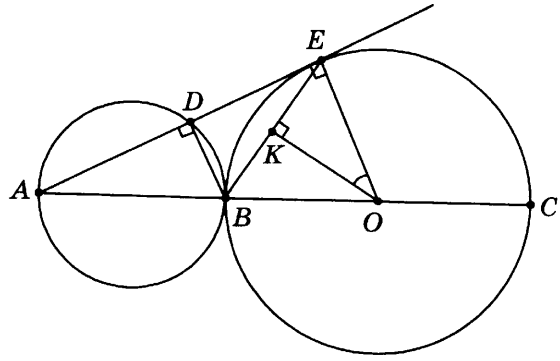


Рис. 64

*Решение.* Пусть сначала $B$ лежит между $A$ и $C$. Обозначим центр второй окружности через $O$, радиусы первой и второй окружностей соответственно через $R_1$ и $R_2$ (рисунок 64). Углы $ADB$ и $AEO$ — прямые, и $DB \parallel EO$. Проведем серединный перпендикуляр $OK$ к отрезку $BE$. Тогда $BK = KE = 6$. Угол $DEB$ как угол между касательной и хордой равен половине дуги $BE$ второй окружности. Угол $KOE$ также равен половине этой дуги. Следовательно, $\angle DEB = \angle KOE$ и треугольники $DEB$ и $KOE$ подобны (по двум углам). Имеем:

$$\frac{EB}{OE} = \frac{BD}{EK} \Leftrightarrow \frac{12}{R_2} = \frac{9}{6} \Leftrightarrow R_2 = 8.$$

Заметим, что этот случай невозможен, так как из геометрических соображений ясно, что должно выполняться неравенство $EO > DB$ ($R_2 > 9$).

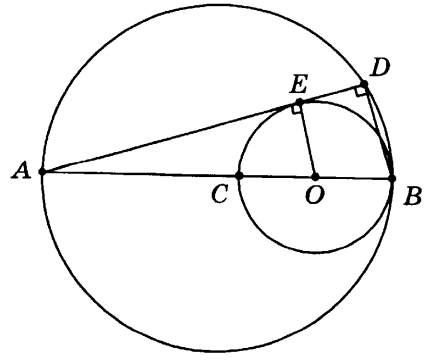


Рис. 65

Рассмотрим теперь случай, когда $C$ лежит между $A$ и $B$ (рисунок 65). Так же как и в первом случае находим, что $R_2 = 8$. Треугольники $ADB$ и $AEO$ подобны (по двум углам). Имеем:

$$\frac{DB}{EO} = \frac{BA}{OA} \Leftrightarrow \frac{9}{8} = \frac{2R_1}{2R_1 - 8} \Leftrightarrow R_1 = 36.$$

Наконец, точка $A$ не может лежать между $B$ и $C$, так как в этом случае через точку $A$ нельзя провести прямую, касающуюся второй окружности.

Ответ: $R_1 = 36$, $R_2 = 8$.

**Пример 14.** Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $E$. Известно, что $AC$ — биссектриса угла $BAD$, $BC = CD$, $\angle BCD = 160°$, а $\angle CED = 130°$. Найти угол $ABD$.

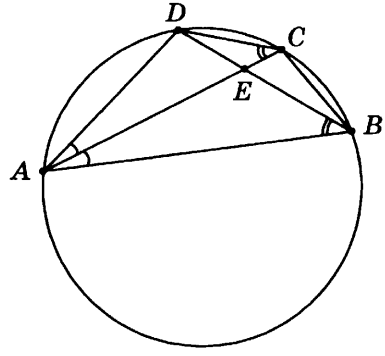


Рис. 66

*Решение.* Применим к треугольникам $ABC$ и $ADC$ теорему синусов (рисунок 66):

$$\frac{BC}{\sin\angle BAC} = \frac{AC}{\sin\angle ABC}; \quad \frac{DC}{\sin\angle DAC} = \frac{AC}{\sin\angle ADC}.$$

Поскольку $BC = CD$ и $\angle BAC = \angle DAC$, то $\sin\angle ABC = \sin\angle ADC$, поэтому углы $ABC$ и $ADC$ либо равны, либо составляют в сумме 180°. Заметим, что если $\angle ABC = \angle ADC$, то равны также углы $ACB$ и $ACD$ и равны треугольники $ABC$ и $ADC$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам). Следовательно, эти треугольники симметричны относительно

прямой $AC$, что противоречит условию $\angle CED = 130°$. Следовательно, $\angle ABC + \angle ADC = 180°$. Это означает, что вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

Угол $ABD$ равен углу $ACD$ (как опирающиеся на одну и ту же дугу). Найдем величину этого угла. Треугольник $BCD$ — равнобедренный с углом при вершине 160°, следовательно, угол при основании этого треугольника $\angle CDB = 10°$. Применив теперь теорему о сумме углов треугольника к треугольнику $CED$, получим:

$$\angle ECD = 180° - \angle CED - \angle CDE = 180° - 130° - 10° = 40°.$$

Значит, и угол $ABD$ равен 40°.

Ответ: 40°.

**Пример 15.** Окружность радиуса 6 проходит через вершину $B$ треугольника $ABC$ и пересекает его стороны $AB$ и $BC$ в точках $E$ и $F$ соответственно. Центр $O$ окружности лежит на стороне $AC$, при этом $AO = 10$, $CO = 12$, $EF \parallel AC$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$.

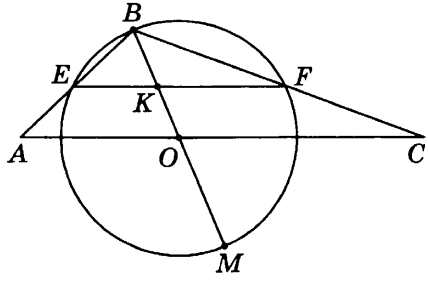


Рис. 67

*Решение.* Пусть $K$ и $M$ — точки пересечения прямой $BO$ с прямой $EF$ и окружностью соответственно (рисунок 67). Треугольники $EBF$ и $ABC$ подобны, поэтому соответствующие элементы этих треугольников пропорциональны. Имеем:

$$KE : KB : KF = OA : OB : OC = 5 : 3 : 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow KE = 5x,\ KB = 3x,\ KF = 6x.$$

Тогда $KM = 12 - 3x$. Так как в окружности произведения отрезков двух пересекающихся хорд равны, имеем:

$$KE \cdot KF = KB \cdot KM \Leftrightarrow 5x \cdot 6x = 3x \cdot (12 - 3x) \Leftrightarrow x = \frac{12}{13}.$$

Таким образом, коэффициент подобия двух указанных треугольников равен $k = \frac{KE}{OA} = \frac{5x}{10} = \frac{6}{13}$. Значит, если радиус окружности, описанной около треугольника $EBF$, равен 6, то радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$, равен 13.

Ответ: 13.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**1.** Продолжение медианы треугольника $ABC$, проведенной из вершины $A$, пересекает описанную около треугольника $ABC$ окружность в точке $D$. Найти длину отрезка $BC$, если длина каждой из хорд $AC$ и $DC$ равна 1.

**2.** Через центр окружности, описанной около треугольника $ABC$, проведены прямые, перпендикулярные сторонам $AC$ и $BC$. Эти прямые пересекают высоту $CH$ треугольника или ее продолжение в точках $P$ и $Q$. Известно, что $CP = p$, $CQ = q$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$.

**3.** На стороне $AB$ треугольника $ABC$ как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны $AC$ и $BC$ в точках $D$ и $E$ соответственно. Прямая $DE$ делит площадь треугольника $ABC$ пополам и образует с прямой $AB$ угол 15°. Найти углы треугольника $ABC$.

**4.** На стороне $AB$ треугольника $ABC$ взята такая точка $D$, что окружность, проходящая через точки $A$, $C$ и $D$, касается прямой $BC$. Найти $AD$, если $AC = 9$, $BC = 12$ и $CD = 6$.

**5.** Окружность касается сторон угла с вершиной $O$ в точках $A$ и $B$. На этой окружности внутри треугольника $AOB$ взята точка $C$. Расстояния от точки $C$ до прямых $OA$ и $OB$ равны соответственно $a$ и $b$. Найти расстояние от точки $C$ до хорды $AB$.

**6.** В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $E$. Вокруг треугольника $ECB$ описана окружность, а касательная к этой окружности, проведенная в точке $E$, пересекает прямую $AD$ в точке $F$ таким образом, что точки $A$, $D$ и $F$ лежат последовательно на этой прямой. Известно, что $AF = a$, $AD = b$. Найдите $EF$.

**7.** В окружности проведены диаметр $MN$ и хорда $AB$, параллельная диаметру $MN$. Касательная к окружности в точке $M$ пересекает прямые $NA$ и $NB$ соответственно в точках $P$ и $Q$. Известно, что $MP = p$, $MQ = q$. Найти $MN$.

**8.** Через вершины $A$ и $B$ треугольника $ABC$ проведена окружность, пересекающая стороны $BC$ и $AC$ в точках $D$ и $E$ соответственно. Площадь треугольника $CDE$ в 7 раз меньше площади четырехугольника $ABDE$. Найти $DE$ и радиус окружности, если $AB = 4$ и $\angle C = 45°$.

**9.** В окружности проведены две хорды $AC$ и $BD$, пересекающиеся в точке $E$, причем касательная к окружности, проходящая через точку $A$, параллельна $BD$. Известно, что $CD : ED = 3 : 2$ и $S_{\Delta ABE} = 8$. Найти площадь треугольника $ABC$.

**10.** В треугольнике $ABC$ известно, что длина $AB$ равна 3, $\angle ACB = \arcsin\frac{3}{5}$. Хорда $KN$ окружности, описанной около треугольника $ABC$, пересекает отрезки $AC$ и $BC$ в точках $M$ и $L$ соответственно. При этом $\angle ABC = \angle CML$, площадь четырехугольника $ABLM$ равна 2, а длина $LM$ равна 1. Найти высоту треугольника $KNC$, опущенную из вершины $C$, и его площадь.

**11.** В треугольнике $ABC$ точка $D$ лежит на стороне $BC$, прямая $AD$ пересекается с биссектрисой угла $ACB$ в точке $O$. Известно, что точки $C$, $D$ и $O$ лежат на окружности, центр которой находится на стороне $AC$, $AC : AB = 3 : 2$, а величина угла $DAC$ в три раза больше величины угла $DAB$. Найти косинус угла $ACB$.

**12.** Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник $ABC$, касается основания $AC$ в точке $D$ и боковой стороны $AB$ в точке $E$. Точка $F$ — середина стороны $AB$, а точка $G$ — точка

пересечения окружности и отрезка $FD$, отличная от $D$. Касательная к данной окружности, проходящая через точку $G$, пересекает сторону $AB$ в точке $H$. Найти угол $BCA$, если известно, что $FH : HE = 2 : 3$.

**13.** На отрезке $AB$ взята точка $C$ и на отрезках $AB$ и $CB$ как на диаметрах построены окружности. Хорда $AM$ большей окружности касается меньшей окружности в точке $D$. Прямая $BD$ пересекает большую окружность в точке $N$. Известно, что $\angle DAB = \alpha$, $AB = 2R$. Найти площадь четырехугольника $ABMN$.

**14.** На сторонах острого угла $ABC$ взяты точки $A$ и $C$. Одна окружность касается прямой $AB$ в точке $B$ и проходит через точку $C$. Вторая окружность касается прямой $BC$ в точке $B$ и проходит через точку $A$. Точка $D$ — вторая общая точка окружностей. Известно, что $AB = a$, $CD = b$, $BC = c$. Найти $AD$.

**15.** В трапеции $ABCD$ боковая сторона $AB$ перпендикулярна основанию $BC$. Окружность проходит через точки $C$ и $D$ и касается прямой $AB$ в точке $E$. Найти расстояние от точки $E$ до прямой $CD$, если $AD = 4$, а $BC = 3$.

**16.** Вокруг четырехугольника $ABCD$ описана окружность с центром в точке $O$. Известно, что диагонали $AC$ и $BD$ четырехугольника перпендикулярны, $AB = 4$, $DC = 5$. Какие значения может принимать площадь треугольника $AOB$?

**17.** Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке $K$. Хорда $AB$ большей окружности касается меньшей окружности в точке $L$, которая делит хорду в отношении $AL : BL = 2 : 3$. Найти $AK$, если $BK = 12$.

**18.** Окружность, проходящая через вершины $B$, $C$ и $D$ параллелограмма $ABCD$, касается прямой $AD$ и пересекает прямую $AB$ в точках $B$ и $E$. Найти длину отрезка $AE$, если $AD = 4$ и $CE = 5$.

**19.** В треугольнике $KLM$ радиус описанной окружности равен $R$, величина угла $LKM$ равна $\alpha$, точка $O$ — центр окружности, вписанной в этот треугольник. Прямая $KO$

пересекает окружность, описанную около треугольника $KLM$, в точке $N$. Найти длину отрезка $ON$.

**20.** На окружности взяты последовательно точки $P$, $Q$, $R$ и $S$ так, что $PQ = PS$. Отрезки $PR$ и $QS$ пересекаются в точке $T$, причем $RQ = q$, $RS = s$, $RT = t$. Найти $PT$.

**21.** Медианы $AP$ и $BQ$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $D$. Найти длину отрезка $AB$, если $CD = \sqrt{12}$ и известно, что вокруг четырехугольника $PCQD$ можно описать окружность.

**22.** В треугольнике $ABC$ биссектрисы $AD$ и $BL$ пересекаются в точке $F$. Величина угла $LFA$ равна 60°. Найти величину угла $ACB$. Вычислить площадь треугольника $ABC$, если $\angle CLD = 45°$ и $AB = 2$.

**23.** Две окружности пересекаются в точках $P$ и $Q$. На первой окружности выбрана точка $A$, а на второй — точки $B$ и $C$ так, что отрезки $AB$ и $AC$ содержат точки $P$ и $Q$ соответственно. Точка $X$ лежит на продолжении отрезка $CB$ за точку $B$. Отрезок $AX$ пересекает первую окружность в точке $Y$. Найти $AY$, если известно, что $AX = a$, $AQ = b$, $AC = c$.

**24.** Две окружности пересекаются в точках $A$ и $B$. Через точку $B$ проведена прямая, пересекающая окружности в точках $C$ и $D$, лежащих по разные стороны от прямой $AB$. Касательные к этим окружностям в точках $C$ и $D$ пересекаются в точке $E$. Найти $AD$, если $AB = 15$, $AC = 20$ и $AE = 24$.

**25.** Треугольник $ABC$ со стороной $AB = 4$ и углом $\angle A = 60°$ вписан в окружность радиуса $2\sqrt{3}$. Найти среднюю линию этого треугольника, параллельную $AC$, и расстояние между точками, в которых ее продолжение пересекает окружность.

**26.** Окружность проходит через вершину $B$ треугольника $ABC$, касается стороны $AC$ в ее середине $D$ и пересекает стороны $AB$ и $BC$ в точках $M$ и $N$ соответственно. Известно, что $AB : BC = 3 : 2$. Найти отношение площади треугольника $AMD$ к площади треугольника $DNC$.

**27.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AC = 4\sqrt{3}$ радиус вписанной окружности равен 3. Прямая $AE$ пересекает высоту $BD$ в точке $E$, а вписанную окружность — в точках $M$ и $N$ ($M$ между $A$ и $E$). Найти длину отрезка $EN$, если $ED = 2$.

**28.** Окружность, проходящая через вершину $A$ треугольника $ABC$, касается стороны $BC$ в точке $M$ и пересекает стороны $AC$ и $AB$ соответственно в точках $L$ и $K$, отличных от вершины $A$. Найти отношение $AC : AB$, если известно, что длина отрезка $LC$ в два раза больше длины отрезка $KB$, а отношение $CM : BM = 3 : 2$.

# § 7. КАСАНИЕ ОКРУЖНОСТЕЙ, КАСАНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

В настоящем параграфе мы рассмотрим несколько задач, связанных с касанием окружностей, а также касанием прямой и окружности. Сформулируем несколько утверждений. Первые четыре из них описывают геометрическую конфигурацию, последние три часто применяются при решении задач данного типа.

**Теорема 1.** Если две окружности касаются внешним образом, то центры окружностей и точка касания лежат на одной прямой, а расстояние между центрами равно сумме радиусов этих окружностей.

**Теорема 2.** Если две окружности касаются внутренним образом, то центры окружностей и точка касания лежат на одной прямой, а расстояние между центрами равно модулю разности радиусов этих окружностей.

**Теорема 3.** Если прямая касается окружности, то радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен этой прямой.

**Теорема 4.** Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

**Теорема 5.** В любом описанном четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны.

**Теорема 6.** В любом треугольнике расстояние от вершины треугольника до точки касания вписанной окружности со стороной треугольника, выходящей из данной вершины, есть разность полупериметра треугольника и стороны, противолежащей данной вершине.

**Теорема 7.** В любом треугольнике расстояние от вершины треугольника до точки касания вневписанной окружности (касающейся противоположной данной вершине стороны

треугольника и продолжений двух других его сторон) с продолжением стороны треугольника, выходящей из данной вершины, есть полупериметр треугольника.

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Дана окружность с центром в точке $O$ и радиусом 2. Из конца отрезка $OA$, пересекающегося с окружностью в точке $M$, проведена касательная $AK$ к окружности. Величина угла $OAK$ равна $\pi / 3$. Найти радиус окружности, касающейся отрезков $AK$, $AM$ и дуги $MK$.

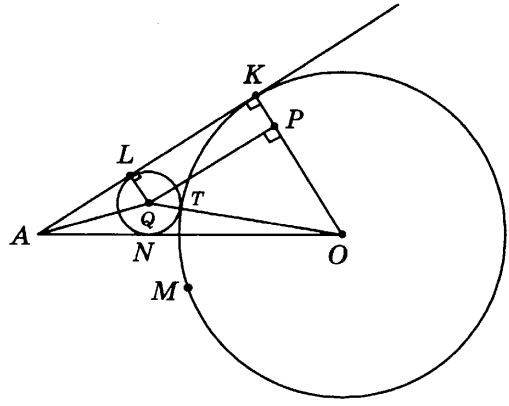


Рис. 68

*Решение.* Пусть $Q$ — центр второй окружности, $r$ — ее радиус, $T$, $L$, $N$ — точки касания второй окружности с дугой $MK$ и отрезками $AK$ и $AM$ соответственно (рисунок 68). Из прямоугольного треугольника $AKO$ находим, что $AK = KO \cdot \mathrm{ctg}\angle KAO = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Рассмотрим прямоугольную трапецию $OKLQ$ и проведем в ней высоту $QP$. Применим к треугольнику $OPQ$ теорему Пифагора:

$$KL = PQ = \sqrt{OQ^2 - OP^2} = \sqrt{(2+r)^2 - (2-r)^2} = 2\sqrt{2r}.$$

Тогда $AL = AK - KL = \frac{2}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{2r}$. С другой стороны, рассматривая прямоугольный треугольник $ALQ$, находим, что $AL = LQ \cdot \mathrm{ctg}\angle LAQ = r\sqrt{3}$. Имеем уравнение

$$\frac{2}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{2r} = r\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{2r} = \frac{2}{\sqrt{3}} - r\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r \le \frac{2}{3}, \\ 9r^2 - 36r + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\frac{6 - 4\sqrt{2}}{3}$.

**Пример 2.** Две окружности, радиусы которых относятся как $(9 - 4\sqrt{3})$, касаются друг друга внутренним образом. Проведены две хорды большей окружности, равные по длине и касающиеся меньшей окружности. Одна из этих хорд перпендикулярна отрезку, соединяющему центры окружностей, а другая нет. Найти угол между этими хордами.

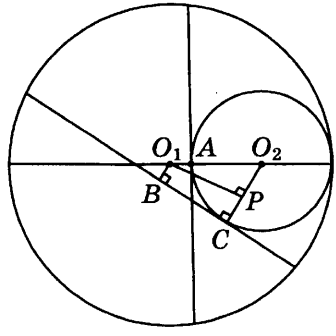


Рис. 69

*Решение.* Можно считать, что радиусы окружностей равны $r = 1$ и $R = 9 - 4\sqrt{3}$; заметим, что $R > 2r$. Пусть $O_1$ — центр большей окружности, $O_2$ — центр меньшей окружности, $A$ — точка касания меньшей окружности и хорды, перпендикулярной отрезку, соединяющему центры окружностей. Пусть $B$ — середина второй хорды (при этом отрезок $O_1B$ перпендикулярен этой хорде), $C$ — точка ее касания с меньшей окружностью (рисунок 69).

Так как построенные хорды равны, то равны расстояния от центра $O_1$ большей окружности до этих хорд: $O_1B = O_1A = R - 2r = 7 - 4\sqrt{3}$. Рассмотрим четырехугольник $BCO_2O_1$, это

прямоугольная трапеция с основаниями $CO_2 = 1$, $O_1B = 7 - 4\sqrt{3}$, боковой стороной $O_1O_2 = R - r = 8 - 4\sqrt{3}$. Опустим перпендикуляр $O_1P$ из точки $O_1$ на $O_2C$, тогда

$$O_2P = O_2C - CP = O_2C - O_1B = 4\sqrt{3} - 6.$$

Из треугольника $O_1O_2P$ находим, что

$$\cos \angle PO_2O_1 = \frac{O_2P}{O_1O_2} = \frac{4\sqrt{3} - 6}{8 - 4\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{4 - 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2(2 - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

значит, угол $PO_2O_1$ равен 30°. Остается заметить, что угол между хордами равен углу $PO_2O_1$ между перпендикулярами к этим хордам.

Ответ: 30°.

**Пример 3.** В угол с вершиной $A$ величиной в 60° вписана окружность с центром в точке $O$. К этой окружности проведена касательная, пересекающая стороны угла в точках $B$ и $C$. Отрезок $BC$ пересекается с отрезком $AO$ в точке $M$. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник $ABC$, если $AM : MO = 2 : 3$ и $BC = 7$.

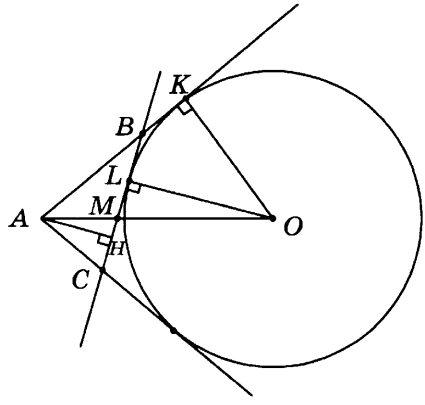


Рис. 70

*Решение.* Пусть $K$ и $L$ — точки касания данной окружности с прямыми $AB$ и $BC$ соответственно, $AH$ — высота треугольника $ABC$ (рисунок 70). Пусть также $AH = h$, радиус данной окружности равен $R$; $p$ — полупериметр треугольника $ABC$, $r$ — радиус вписанной в него окружности. Треугольники $AHM$ и $OLM$ подобны, откуда

$$\frac{AH}{OL}=\frac{MA}{MO}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{h}{R}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow R=\frac{3h}{2}.$$

В прямоугольном треугольнике $AKO$ согласно теореме 7 находим, что $AK = p$, поэтому $R=OK=AK\cdot\mathrm{tg}\angle KAO=$ $=p\mathrm{tg}30^\circ=\frac{p}{\sqrt{3}}$. Таким образом, $\frac{3h}{2}=\frac{p}{\sqrt{3}}$, откуда $\frac{h}{p}=\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Выразим теперь двумя способами площадь треугольника $ABC$. Имеем:

$$S=\frac{1}{2}BC\cdot h=pr\Leftrightarrow\frac{7h}{2}=pr\Leftrightarrow r=\frac{7}{2}\cdot\frac{h}{p}=\frac{7}{2}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{7}{3\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{7}{3\sqrt{3}}$.

**Пример 4.** Дан равнобедренный треугольник $ABC$ с боковой стороной, равной 4, и углом $\angle ABC = 120^\circ$. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найти радиусы окружностей.

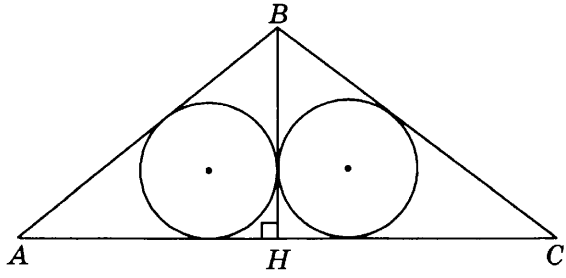


Рис. 71

*Решение.* Рассмотрим сначала случай, когда обе окружности касаются основания треугольника. Проведем высоту $BH$ треугольника $ABC$. Тогда одна из окружностей будет вписана в треугольник $ABH$ (рисунок 71). В этом треугольнике имеем $AB = 4$, $BH = 2$, $AH = 2\sqrt{3}$. Согласно теореме 6 параграфа 1 находим, что

$$r=\frac{AH+BH-AB}{2}=\sqrt{3}-1.$$

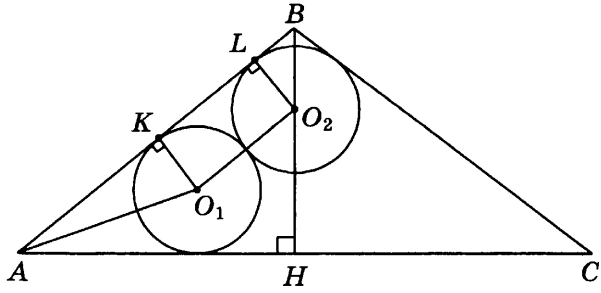


Рис. 72

Пусть теперь обе окружности касаются, например, стороны $AB$. Обозначим центры этих окружностей через $O_1$ и $O_2$ ($O_2$ лежит на высоте $BH$ треугольника $ABC$), а точки касания окружностей с прямой $AB$ соответственно через $K$ и $L$ (рисунок 72). Пусть также радиус каждой из окружностей равен $r$. Тогда $KL = O_1O_2 = 2r$. Из прямоугольного треугольника $AKO_1$ находим:

$$AK = \frac{KO_1}{\operatorname{tg}\angle KAO_1} = \frac{r}{\operatorname{tg}15^\circ} = r\cdot\frac{1+\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}45^\circ}{\operatorname{tg}60^\circ-\operatorname{tg}45^\circ} = r\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = r(2+\sqrt{3}).$$

Из прямоугольного треугольника $BO_2L$ получаем: $LB = \dfrac{LO_2}{\operatorname{tg}\angle LBO_2} = \dfrac{r}{\operatorname{tg}60^\circ} = \dfrac{r}{\sqrt{3}}$. Имеем:

$$AB = AK + KL + LB \Leftrightarrow 4 = r(2+\sqrt{3}) + 2r + \frac{r}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\sqrt{3}-1$ или $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$.

**Пример 5.** Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найти радиус окружности, если отрезок прямой, заключенный внутри треугольника, равен 6, а отношение боковой стороны треугольника к его основанию равно 5/6.

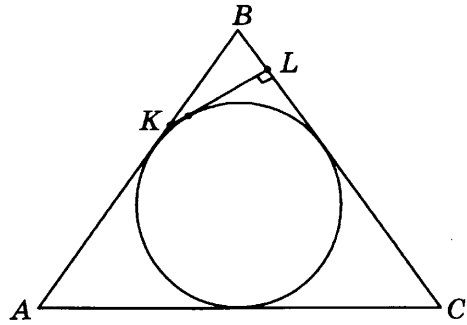


Рис. 73

*Решение.* Пусть $ABC$ — данный равнобедренный треугольник ($AB = BC = 5x$, $AC = 6x$), $KL$ — данная прямая, $KL \perp BC$, $K$ лежит на $AB$, $L$ лежит на $BC$ (рисунок 73). Из треугольника $ABC$ найдем косинус угла $B$. Имеем:

$$\cos\angle B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{25x^2 + 25x^2 - 36x^2}{2 \cdot 5x \cdot 5x} = \frac{7}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\angle B = \frac{24}{25} \text{ и } \operatorname{tg}\angle B = \frac{7}{24}.$$

Из прямоугольного треугольника $KBL$ ($KL = 6$) получаем: $KB = \dfrac{KL}{\sin\angle B} = \dfrac{25}{4}$ и $BL = \dfrac{KL}{\operatorname{tg}\angle B} = \dfrac{7}{4}$. Тогда $AK = AB - KB = 5x - \dfrac{25}{4}$ и $LC = BC - BL = 5x - \dfrac{7}{4}$. Так как четырехугольник $AKLC$ описан около окружности, то суммы его противоположных сторон равны. Имеем:

$$AK + LC = AC + KL \Leftrightarrow \left(5x - \frac{25}{4}\right) + \left(5x - \frac{7}{4}\right) = 6x + 6 \Leftrightarrow x = 3{,}5.$$

Таким образом, стороны треугольника $ABC$ равны $AB = BC = 17{,}5$ и $AC = 21$. Заметим, что данная окружность вписана в треугольник $ABC$. Найдем ее радиус. Имеем (обозначения стандартные):

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-17{,}5)^2(p-21)}}{p} = (p = 28) = \frac{10{,}5 \cdot 14}{28} = \frac{21}{4}.$$

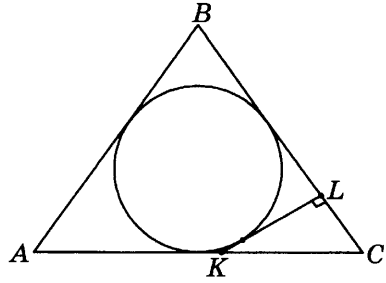


Рис. 74

Пусть теперь дан треугольник $ABC$, в котором $AB = BC = 5x$ и $AC = 6x$, прямая $KL$ перпендикулярна прямой $BC$, $K \in AC$, $L \in BC$ (рисунок 74). Аналогично первому случаю находим, что $\cos\angle C = \frac{3}{5}$, $\sin\angle C = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\angle C = \frac{4}{3}$. Из прямоугольного треугольника $KLC$ получаем, что $KC = 7{,}5$; $LC = 4{,}5$; откуда $AK = 6x - 7{,}5$ и $BL = 5x - 4{,}5$. Имеем далее:

$$AK + BL = AB + KL \Leftrightarrow 6x - 7,5 + 5x - 4,5 = 5x + 6 \Leftrightarrow x = 3.$$

Значит, стороны треугольника $ABC$ равны $AB = BC = 15$, $AC = 18$, а радиус вписанной в этот треугольник окружности равен

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-15)^2(p-18)}}{p} = (p = 24) = \frac{9 \cdot 12}{24} = \frac{9}{2}.$$

Ответ: 21/4 или 9/2.

**Пример 6.** На диаметре $AB$ окружности радиуса 3 с центром в точке $O$ выбрана точка $C$ так, что $AC = 5$. Через точку $C$ проведена хорда $DE$, перпендикулярная диаметру $AB$. Найти радиус окружности, касающейся отрезков $AC$, $CE$ и дуги $AE$.

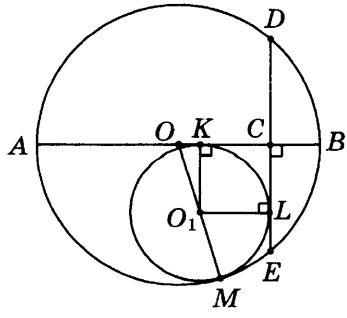


Рис. 75

*Решение.* Пусть окружность с центром $O_1$ и радиусом $r$ касается отрезков $AC$, $CE$ и дуги $AE$ в точках $K$, $L$ и $M$ соответственно (рисунок 75). Тогда точки $O$, $O_1$ и $M$ лежат на одной прямой и $OO_1 = OM - O_1M = 3 - r$. Четырехугольник $O_1KCL$ — квадрат со стороной $r$, поэтому $OK = |OC - KC| = |2 - r|$ (модуль ставится, так как мы не знаем, лежит ли точка $K$ между точками $O$ и $C$, или нет). Рассмотрим прямоугольный треугольник $OKO_1$. Имеем:

$$OO_1^2 = OK^2 + KO_1^2 \Leftrightarrow (3-r)^2 = |2-r|^2 + r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^2 + 2r - 5 = 0 \Rightarrow r = \sqrt{6} - 1.$$

Ответ: $\sqrt{6} - 1$.

**Пример 7.** Через центр $O$ вписанной в треугольник $ABC$ окружности проведена прямая, параллельная стороне $BC$ и пересекающая стороны $AB$ и $AC$ соответственно в точках $M$ и $N$. Периметр треугольника $AMN$ равен $3\sqrt[4]{2}$, длина стороны $BC$ равна $\sqrt[4]{2}$, а длина отрезка $AO$ в три раза больше радиуса вписанной в треугольник $ABC$ окружности. Найти площадь треугольника $ABC$.

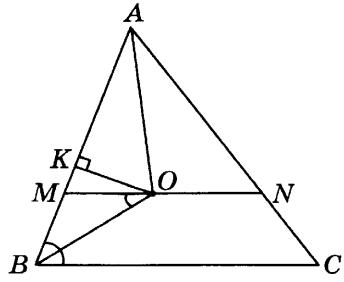


Рис. 76

*Решение.* Так как $BO$ — биссектриса угла $ABC$, то углы $MBO$ и $OBC$ равны. С другой стороны, $\angle OBC = \angle BOM$ (как накрест лежащие). Следовательно, $\angle MBO = \angle BOM$, треугольник $MBO$ — равнобедренный, $MB = MO$ (рисунок 76). Аналогично $NC = NO$. Это означает, что периметр треугольника $AMN$ равен $AB + AC$. Таким образом, периметр треугольника $ABC$ равен $4\sqrt[4]{2}$, а его полупериметр равен $p = 2\sqrt[4]{2}$.

Пусть $K$ — точка касания вписанной окружности со стороной $AB$. Согласно теореме 6 находим, что $AK = p - BC = \sqrt[4]{2}$. Пусть также $r$ — радиус вписанной в треугольник $ABC$ окружности. Тогда $OK = r$ и $AO = 3r$. Это означает, что $AK = 2\sqrt{2}r$. Имеем: $2\sqrt{2}r = \sqrt[4]{2}$, откуда $r = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}$. Таким образом, площадь треугольника $ABC$ равна $S = pr = 2\sqrt[4]{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt[4]{2}} = 1$.

Ответ: 1.

**Пример 8.** Дана прямоугольная трапеция. Известно, что некоторая прямая, параллельная основаниям, рассекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Определить основания исходной трапеции, если ее боковые стороны равны $c$ и $d$ ($c < d$).

*Решение.* Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $AB$ и $CD$ — ее боковые стороны, $AB = c$, $BC = b$, $CD = d$, $AD = a$ ($a > b$). Пусть также $PQ$ — данная прямая, $P \in AB$, $Q \in CD$. Обозначим центры окружностей, вписанных в трапеции $APQD$ и $PBCQ$ через $O_1$ и $O_2$, а их радиусы через $R_1$ и $R_2$ соответственно. Точки касания окружности с центром $O_1$ с отрезками $AP$, $PQ$, $QD$, $AD$ обозначим соответственно через $E$, $F$, $G$, $H$, а точки касания окружности с центром $O_2$ с отрезками $PB$, $BC$, $CQ$, $PQ$ — соответственно через $K$, $L$, $M$, $N$ (рисунок 77). Докажем, что $CD = AD + BC$.

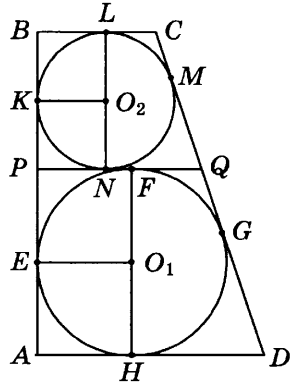


Рис. 77

Так как прямые $AB$ и $CD$ есть общие внешние касательные к данным окружностям, то $EK = GM$. Четырехугольники $EPFO_1$ и $PKO_2N$ есть квадраты, поэтому $EP = R_1$, $PK = R_2$ и $EK = R_1 + R_2$. С другой стороны, $AEO_1H$ и $KBLO_2$ — также квадраты, поэтому $AH = R_1$ и $BL = R_2$. Отметим еще равенство касательных, проведенных к окружности из одной точки: $DH = DG$ и $CL = CM$. Окончательно получаем:

$$CD = CM + DG + GM = CM + DG + EK = CM + DG + R_1 + R_2,$$

$$AD + BC = AH + DH + BL + CL = CL + DH + R_1 + R_2,$$

поэтому $CD = AD + BC$, что и требовалось доказать.

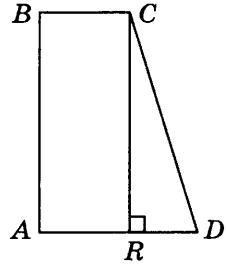


Рис. 78

Итак, $d = a + b$. Легко показать, что $c^2 + (a - b)^2 = d^2$. Для этого достаточно опустить из точки $C$ высоту $CR$ и рассмотреть прямоугольный треугольник $CDR$ (рисунок 78). Из двух полученных равенств находим, что $a = \frac{1}{2}(d + \sqrt{d^2 - c^2})$, а $b = \frac{1}{2}(d - \sqrt{d^2 - c^2})$.

Ответ: $\frac{1}{2}(d \pm \sqrt{d^2 - c^2})$.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**1.** На отрезке $AB$ длины $2R$ как на диаметре построена окружность. Вторая окружность такого же радиуса, что и первая, имеет центр в точке $A$. Третья окружность касается первой внутренним образом, второй — внешним образом, а также касается отрезка $AB$. Найти радиус третьей окружности.

**2.** Круг радиуса 6 лежит внутри полукруга радиуса 24 и касается середины диаметра полукруга. Найти радиус меньшей окружности, касающейся заданных круга, полукруга и диаметра полукруга.

**3.** В круге с центром $O$ хорда $AB$ пересекает радиус $OC$ в точке $D$, причем угол $CDA$ равен $2\pi / 3$. Найти радиус окружности, касающейся отрезков $AD$, $DC$ и дуги $AC$, если $OC = 2$ и $OD = \sqrt{3}$.

**4.** В четырехугольнике $ABCD$ расположены две непересекающиеся окружности так, что одна из них касается сторон $AB$, $BC$ и $CD$, а другая — сторон $AB$, $AD$ и $CD$. Прямая $MN$ пересекает стороны $AB$ и $CD$ соответственно в точках $M$ и $N$ и касается обеих окружностей. Найти расстояние между центрами окружностей, если периметр четырехугольника $MBCN$ равен $2p$, сторона $BC$ равна $a$ и разность радиусов окружностей равна $r$.

**5.** В треугольнике $ABC$ длина биссектрисы $AL$ равна $l$. В треугольник $ABL$ вписана окружность, касающаяся стороны $AB$ в точке $K$, причем $BK = b$. На сторонах $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$ соответственно выбраны точки $M$ и $N$ так, что прямая $MN$ проходит через центр окружности, вписанной в треугольник $ABC$, причем $MB + BN = c$. Найти отношение площадей треугольников $ABL$ и $MBN$.

**6.** Две окружности радиусов $\sqrt{19}$ и $\sqrt{76}$, касающиеся друг друга внешним образом, вписаны в полуокружность. Вычислить радиус полуокружности.

**7.** Через точку $N$ проведены две прямые, касающиеся некоторой окружности с центром $O$. На одной из этих прямых взята точка $A$, а на другой прямой взята точка $B$ так, что $OA = OB$, $OA > ON$, $NA \neq NB$. Известно, что $NA = a$, $NB = b$, $OA = c$. Найти $ON$.

**8.** В треугольнике $ABC$ известны длины сторон $AB = 15$, $BC = 8$ и $AC = 9$. Точка $D$ лежит на прямой $BC$ так, что $BC : DC = 3 : 8$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников

$ADC$ и $ADB$, касаются стороны $AD$ в точках $E$ и $F$. Найти длину отрезка $EF$.

**9.** В окружности, радиус которой равен 5, проведена хорда $AB = 8$. Точка $C$ лежит на хорде $AB$ так, что $AC : CB = 1 : 2$. Найти радиус окружности, касающейся данной окружности и касающейся хорды $AB$ в точке $C$.

**10.** Даны две окружности. Первая окружность вписана в треугольник $ABC$, вторая касается стороны $AC$ и продолжений сторон $AB$ и $BC$. Известно, что эти окружности касаются друг друга, произведение их радиусов равно 20, а угол $BAC$ равен $\arccos\frac{2}{3}$. Найти периметр треугольника $ABC$.

**11.** Окружность проходит через вершину $B$ угла $\angle ABC = \alpha$ и отсекает на его сторонах равные отрезки $BA$ и $BC$. Другая окружность касается отрезков $BA$ и $BC$ в точках $M$ и $N$ соответственно, а также касается первой окружности. Найти отношение $MN : AC$.

**12.** Окружность с центром в точке $M$ касается сторон угла $AOB$ в точках $A$ и $B$. Вторая окружность с центром в точке $N$ касается отрезка $OA$, луча $BA$ и продолжения стороны угла $OB$ за точку $O$. Известно, что $ON : OM = 12 : 13$. Найти отношение радиусов этих окружностей.

**13.** В равнобедренной трапеции с основаниями 1 и 4 расположены две окружности, каждая из которых касается другой окружности, двух боковых сторон и одного из оснований. Найти площадь трапеции.

# § 8. ДЛИНЫ И ПЛОЩАДИ, СВЯЗАННЫЕ С ОКРУЖНОСТЬЮ

В данном параграфе приведем несколько формул, позволяющих вычислять длину окружности и ее дуги, а также площадь круга, площадь кругового сектора и кругового сегмента. Напомним, что *сектором* называется часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой окружности, а *сегментом* — часть круга, ограниченная некоторой прямой и дугой окружности. Угловой величиной сектора или сегмента называется угловая величина дуги, ограничивающая этот сектор (сегмент). Все углы измеряются в радианах.

**Теорема 1.** Длина окружности радиуса $R$ равна $2\pi R$.

**Теорема 2.** Длина дуги угловой величины $\alpha$ окружности радиуса $R$ равна $\alpha R$.

**Теорема 3.** Площадь круга радиуса $R$ равна $\pi R^2$.

**Теорема 4.** Площадь сектора угловой величины $\alpha$ круга радиуса $R$ равна $\frac{1}{2}\alpha R^2$.

**Теорема 5.** Площадь сегмента угловой величины $\alpha$ круга радиуса $R$ равна $\frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$.

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Полуокружность радиуса $R$ разделена точками на три равные части, и точки деления соединены хордами с одним и тем же концом диаметра, стягивающего эту полуокружность. Найти площадь фигуры, ограниченной двумя хордами и заключенной между ними дугой.

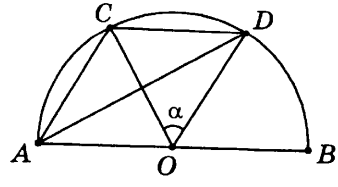


Рис. 79

*Решение.* Пусть $O$ — центр полуокружности, $AB$ — ее диаметр, $C$ и $D$ — точки деления ($C$ на окружности между $A$ и $D$). Надо найти площадь фигуры, ограниченной хордами $AC$ и $AD$ и дугой $CD$ (рисунок 79). Так как площади треугольников $ACD$ и $OCD$ равны (они имеют одно и то же основание и равные высоты), то площадь искомой фигуры равна площади кругового сектора, ограниченного радиусами $OC$ и $OD$ и дугой $CD$. Поскольку угловая величина дуги $CD$ равна $\alpha = \frac{\pi}{3}$, площадь этого сектора равна $S = \frac{1}{2}\alpha R^2 = \frac{\pi R^2}{6}$.

Ответ: $\frac{\pi R^2}{6}$.

**Пример 2.** В окружность вписан треугольник со сторонами 7, 24 и 25. Вычислить площадь кругового сегмента, стянутого хордой длины 7.

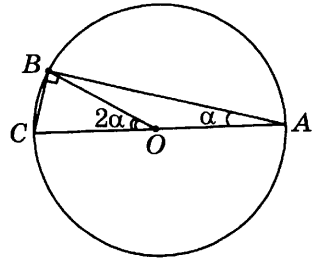


Рис. 80

*Решение.* Обозначим через $ABC$ данный треугольник таким образом, что $AB = 24$, $BC = 7$, $AC = 25$. Так как верно равенство $7^2 + 24^2 = 25^2$, то треугольник $ABC$ — прямоугольный (угол $B$ — прямой), центр $O$ окружности, описанной около этого треугольника, является серединой гипотенузы $AC$, а радиус этой окружности равен 12,5 (рисунок 80). Пусть $\angle BAC = \alpha$. Из треугольника $ABC$ получаем, что $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, $\cos\alpha = \frac{24}{25}$ и $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{336}{625}$. Значит, $\alpha = \arcsin\frac{7}{25}$. Тогда $\angle BOC = 2\alpha$ и площадь сегмента окружности, стянутого хордой $BC$, равна

$$S=\frac{R^2(2\alpha-\sin 2\alpha)}{2}=\frac{12{,}5^2\cdot(2\arcsin\frac{7}{25}-\frac{336}{625})}{2}=$$

$$=\frac{625}{4}\arcsin\frac{7}{25}-42.$$

Ответ: $\frac{625}{4}\arcsin\frac{7}{25}-42$.

**Пример 3.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ угол между равными сторонами $AB$ и $AC$ равен $\pi/4$. Из вершин треугольника $ABC$ на его стороны опущены высоты $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$. Через точки $A$, $B_1$ и $C_1$ проведена окружность $\Omega$, а через точки $B$, $A_1$ и $C_1$ — окружность $\Omega_1$. Найти отношение площади круга, ограниченного окружностью $\Omega$, к площади общей части кругов, ограниченных окружностями $\Omega$ и $\Omega_1$.

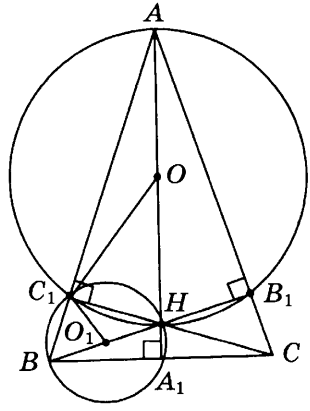


Рис. 81

*Решение.* Пусть $H$ — точка пересечения высот треугольника $ABC$, точки $O$ и $O_1$ — центры окружностей $\Omega$ и $\Omega_1$ соответственно, $R$ и $R_1$ — их радиусы. Рассмотрим четырехугольник $AC_1HB_1$. Так как его противолежащие углы $AC_1H$ и $AB_1H$ равны $\pi/2$ каждый, то окружность $\Omega$ является описанной около этого четырехугольника, а ее центр $O$ есть середина отрезка $AH$ (рисунок 81). Аналогично окружность $\Omega_1$ описана около четырехугольника $BA_1HC_1$, а ее центр $O_1$ есть середина отрезка $BH$. Пусть $R = 1$, тогда $AH = 2$, $C_1H = AH\cdot\sin\angle C_1AH = 2\sin\frac{\pi}{8}$.

Так как угол $AB_1B$ — прямой, то угол $ABB_1$ равен $\pi / 4$ и

$$BH = \frac{C_1H}{\sin \angle C_1BH} = 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8} \Leftrightarrow R_1 = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}.$$

Общая часть кругов $\Omega$ и $\Omega_1$ есть объединение двух пересекающихся по отрезку $C_1H$ сегментов круга $\Omega$ и круга $\Omega_1$. Вычислим отдельно площадь каждого из этих сегментов. Дуга $C_1H$ сегмента круга $\Omega$ имеет угловую величину $\alpha = \angle HOC_1 = 2\angle HAC_1 = \frac{\pi}{4}$, поэтому площадь этого сегмента равна $S = \frac{R^2(\alpha - \sin\alpha)}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4}$. Дуга $C_1H$ сегмента круга $\Omega_1$ имеет угловую величину $\alpha_1 = \angle HO_1C_1 = 2\angle HBC_1 = \frac{\pi}{2}$, поэтому площадь этого сегмента равна

$$S_1 = \frac{R_1^2(\alpha_1 - \sin\alpha_1)}{2} = \frac{2\sin^2\frac{\pi}{8}(\frac{\pi}{2}-1)}{2} = \frac{(1-\cos\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{2}-1)}{2} =$$

$$= \frac{(2-\sqrt{2})(\pi-2)}{8} \Rightarrow S + S_1 = \frac{\pi(3-\sqrt{2})-4}{8}.$$

Искомое отношение равно

$$\lambda = \frac{\pi R^2}{S + S_1} = \frac{8\pi}{\pi(3-\sqrt{2})-4}.$$

Ответ: $\frac{8\pi}{\pi(3-\sqrt{2})-4}$.

**Пример 4.** Вне прямого угла с вершиной $C$, на продолжении его биссектрисы взята точка $O$ так, что $OC = \sqrt{2}$. С центром в точке $O$ построена окружность радиуса 2. Найти площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключенной между ними.

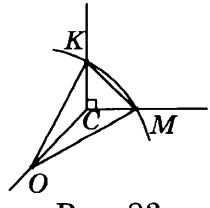


Рис. 82

*Решение.* Пусть $K$ и $M$ — точки пересечения окружности со сторонами угла. Разобьем фигуру, площадь которой надо найти, на сегмент, ограниченный дугой $MK$ и отрезком $MK$, и треугольник $CMK$. Найдем площади $S_1$ и $S_2$ этих частей (рисунок 82). Сначала вычислим площадь сегмента. Рассмотрим треугольник $OCK$, в нем $OC = \sqrt{2}$, $OK = 2$, $\angle OCK = \frac{3\pi}{4}$. Применим к этому треугольнику теорему синусов:

$$\frac{OK}{\sin\angle OCK} = \frac{OC}{\sin\angle CKO} \Leftrightarrow \sin\angle CKO = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle CKO = \frac{\pi}{6}.$$

Следовательно, $\angle COK = \pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$ и $\angle MOK = \frac{\pi}{6}$.

Тогда площадь сегмента равна $S_1 = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} - 1$.

Вычислим теперь площадь треугольника $CMK$. Применив снова к треугольнику $OCK$ теорему синусов, получим:

$$\frac{CK}{\sin\angle COK} = \frac{OK}{\sin\angle OCK} \Rightarrow CK = 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}.$$

Значит, площадь треугольника $CMK$ равна

$$S_2 = S_{CMK} = \frac{CK^2}{2} = 4\sin^2\frac{\pi}{12} = 2 - 2\cos\frac{\pi}{6} = 2 - \sqrt{3}.$$

Следовательно, искомая площадь равна

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{3} - 1 + 2 - \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1$.

**Пример 5.** Хорды $AB$ и $AC$ имеют одинаковую длину. Величина образованного ими вписанного в окружность угла равна $\pi/6$. Найти отношение площади той части круга, которая заключена в этом угле, к площади всего круга.

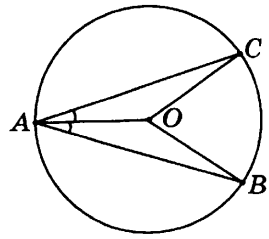


Рис. 83

*Решение.* Можно считать, что радиус окружности равен $R = 1$. Тогда площадь круга равна $S_1 = \pi$. Найдем площадь части круга, заключенной внутри данного угла. Эта площадь равна разности площадей круга и двух его сегментов, стягиваемых хордами $AB$ и $AC$. Пусть $O$ — центр окружности (рисунок 83). Так как $AB = AC$, то эти сегменты равны (а значит, имеют одинаковую площадь). Кроме того, равны также треугольники $AOB$ и $AOC$, а значит, углы $BAO$ и $OAC$. Найдем площадь сегмента, стягиваемого хордой $AB$. Треугольник $AOB$ равнобедренный, поэтому $\angle ABO = \angle BAO = \frac{\pi}{12}$, откуда $\angle AOB = \alpha = \frac{5\pi}{6}$. Площадь сегмента, стягиваемого хордой $AB$, равна

$$S_2 = \frac{R^2}{2} \cdot (\alpha - \sin\alpha) = \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5\pi - 3}{12}.$$

Поэтому площадь части круга, заключенной внутри данного угла, равна

$$S = S_1 - 2S_2 = \pi - 2 \cdot \frac{5\pi - 3}{12} = \frac{\pi + 3}{6} \Leftrightarrow \frac{S}{S_1} = \frac{\pi + 3}{6\pi}.$$

Ответ: $\frac{\pi + 3}{6\pi}$.

**Пример 6.** Угол при основании равнобедренного треугольника равен $\pi / 6$. Построен круг радиуса $2/\sqrt{3}$ с центром в вершине треугольника. Определите отношение площади общей части треугольника и круга к площади треугольника, если длина медианы, проведенной к боковой стороне, равна $\sqrt{7}$.

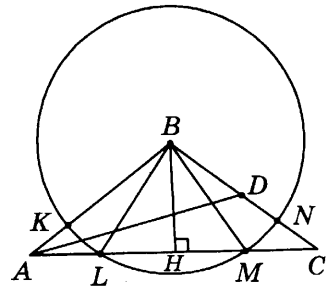


Рис. 84

*Решение.* Пусть $B$ — вершина тупого угла равнобедренного треугольника $ABC$, $AD$ — медиана, проведенная к боковой стороне этого треугольника, $BH$ — высота, опущенная на основание. Пусть $AB = BC = 2x$ (рисунок 84). Так как $\angle BAC = \frac{\pi}{6}$, то из прямоугольного треугольника $ABH$ находим, что $AH = x\sqrt{3}$, и, следовательно, $AC = 2x\sqrt{3}$. Применим к треугольнику $ABC$ формулу для вычисления медианы треугольника:

$$AD = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Итак, $AB = BC = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$. Высота $BH$ треугольника $ABC$ равна $h = AB \cdot \sin\angle BAC = 1$, поэтому $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \sqrt{3}$.

Кроме того, из неравенств $h = 1 < R = \frac{2}{\sqrt{3}} < 2 = AB$ вытекает, что данная окружность пересекает боковые стороны $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$ каждую ровно в одной точке, а основание $AC$ — ровно в двух точках. Пусть $K$, $N$ — точки пересечения окружности соответственно со сторонами $AB$ и $BC$; $L$ и $M$ — точки пересечения окружности со стороной $AC$ ($L$ между $A$ и $H$). Рассматривая равнобедренный треугольник $BLM$ ($BL = BM = R$), находим, что $LM = 2LH = 2\sqrt{BL^2 - BH^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, т.е. треугольник $BLM$ — равносторонний. Его площадь равна $S_{\Delta BLM} = \frac{1}{2}BH \cdot LM = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Далее $\angle LBM = \frac{\pi}{3}$ и поэтому $\angle KBL = \angle MBN = \frac{\angle ABC - \angle LBM}{2} = \frac{\pi}{6}$. Площадь каждого из секторов $KBL$, $MBN$ равна $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\pi}{9}$. Поэтому площадь общей части треугольника $ABC$ и круга равна

$$S_{\Delta BLM} + 2S = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{9} = \frac{3\sqrt{3} + 2\pi}{9}.$$

Искомое отношение равно

$$\frac{3\sqrt{3} + 2\pi}{9} : \sqrt{3} = \frac{9 + 2\sqrt{3}\pi}{27}.$$

Ответ: $\frac{9 + 2\sqrt{3}\pi}{27}$.

**Пример 7.** В круге радиуса 1 проведены хорды $AB = \sqrt{2}$ и $BC = \frac{10}{7}$. Найти площадь части круга, лежащей внутри угла $ABC$, если угол $BAC$ острый.

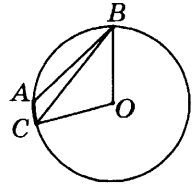


Рис. 85

*Решение.* Пусть $O$ — центр круга. Выясним сначала взаимное расположение точек $A$, $B$, $C$, $O$. Предположим, что точки $A$ и $O$ лежат по разные стороны прямой $BC$ (рисунок 85). Тогда $\angle BAC = \pi - \frac{\angle BOC}{2} > \frac{\pi}{2}$, что противоречит условию.

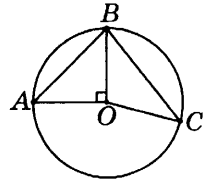


Рис. 86

Итак, точки $A$ и $O$ лежат по одну сторону прямой $BC$, значит, искомая площадь есть сумма площадей треугольников $ABO$, $BCO$ и сектора $AOC$ (рисунок 86). Рассмотрим треугольник $ABO$. Так как $AB^2 = AO^2 + BO^2$, то $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ и, значит, $S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2}AO^2 = \frac{1}{2}$. Рассмотрим треугольник $BCO$. Легко видеть, что $\angle BOC = 2\arcsin\frac{5}{7}$, откуда

$$\sin\angle BOC = \sin\left(2\arcsin\frac{5}{7}\right) = 2\sin\left(\arcsin\frac{5}{7}\right)\cos\left(\arcsin\frac{5}{7}\right) =$$

$$= 2\cdot\frac{5}{7}\cdot\sqrt{1-\frac{25}{49}} = \frac{20\sqrt{6}}{49} \quad \Rightarrow S_{\Delta BCO} = \frac{1}{2}OB\cdot OC\cdot\sin\angle BOC = \frac{10\sqrt{6}}{49}.$$

Далее найдем площадь сектора $AOC$. Угол $AOC$ равен $\alpha = \angle AOC = 2\pi - \angle AOB - \angle BOC = \frac{3\pi}{2} - 2\arcsin\frac{5}{7}$, поэтому площадь сектора $AOC$ равна $S_{AOC} = \frac{1}{2}\cdot r^2\alpha = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{5}{7}$. Получаем, что искомая площадь равна

$$S = S_{\Delta ABO} + S_{\Delta BCO} + S_{AOC} = \frac{1}{2} + \frac{10\sqrt{6}}{49} + \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{5}{7}.$$

Ответ: $\frac{1}{2} + \frac{10\sqrt{6}}{49} + \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{5}{7}$.

**Пример 8.** Найти периметр фигуры, точки которой на координатной плоскости удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y > \left||x-2|-1\right|, \\ x^2 + y^2 < 4x + 2y - 3. \end{cases}$$

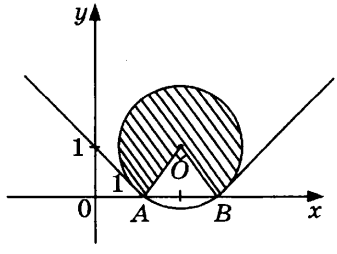


Рис. 87

*Решение.* График функции $y = \| x-2 | -1 |$ рисуем как преобразование графика функции $y = | x |$: сдвиг на две единицы вправо, сдвиг на одну единицу вниз, симметрия части графика, лежащей ниже оси $Ox$, относительно этой оси (рисунок 87). Множество точек $(x, y)$ координатной плоскости, которые удовлетворяют первому неравенству системы, есть множество точек, лежащих выше построенного графика. Второе неравенство системы преобразуем следующим образом:

$$x^2 + y^2 < 4x + 2y - 3 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 < 2.$$

Множество точек, удовлетворяющих этому неравенству, есть внутренность круга с центром $O(2,1)$ радиуса $\sqrt{2}$. Таким образом, искомая фигура представляет собой круговой сектор с центром $O(2,1)$ радиуса $\sqrt{2}$, ограниченный радиусами $OA$ и $OB$ и большей дугой $AB$ окружности, где точки $A$ и $B$ имеют координаты $A(1,0)$, $B(3,0)$. Треугольник $AOB$ — прямоугольный, поэтому угловая величина этого сектора равна $\alpha = \frac{3\pi}{2}$. Согласно теореме 1 длина большей дуги $AB$ равна $l = \alpha R = \frac{3\pi\sqrt{2}}{2}$, длины отрезков $OA$ и $OB$ равны между собой и равны $\sqrt{2}$. Поэтому периметр искомой фигуры есть $l + OA + OB = \frac{3\pi\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2}$.

Ответ: $\frac{3\pi\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2}$.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**1.** В треугольнике $ABC$ боковые стороны $AB$ и $BC$ равны $a$, угол $ABC$ равен 120°. В треугольник $ABC$ вписана окружность, касающаяся стороны $AB$ в точке $D$. Вторая окружность имеет центром точку $B$ и проходит через точку $D$. Найти площадь той части вписанного круга, которая находится внутри второго круга.

**2.** В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке $O$, длина стороны $AB$ равна 1, а величина угла $OAB$ равна 60°. Найти площадь общей части кругов, описанных около треугольников $ABO$ и $BOC$.

**3.** В треугольнике $ABC$ сторона $AB$ равна 4, угол $A$ равен 30°, угол $B$ равен 130°. На стороне $AB$ как на диаметре построен круг. Найти площадь части круга, лежащей внутри треугольника.

**4.** На координатной плоскости $(x, y)$ проведена окружность радиуса 4 с центром в начале координат. Прямая, заданная уравнением $y = 4 - (2 - \sqrt{3})x$, пересекает ее в точках $A$ и $B$. Найти сумму длин отрезка $AB$ и меньшей дуги $AB$.

**5.** Два круга, расстояние между центрами которых равно $\sqrt{3} + 1$, имеют радиусы $\sqrt{2}$ и 2. Найти отношение площади круга, вписанного в общую часть данных кругов, к площади общей части.

**6.** В прямой угол прямоугольного равнобедренного треугольника с гипотенузой $6\sqrt{2}$ вписан круг радиуса 2. Найти площадь той части круга, которая лежит вне этого треугольника.

**7.** На биссектрисе $BL$ треугольника $ABC$ как на диаметре построена окружность с центром в точке $O$, пересекающая сторону $AB$ в точке $D$, а сторону $BC$ — в точке $E$, причем верно равенство $AD \cdot LC = EC \cdot AL$. Найти площадь той части треугольника $ABC$, которая лежит вне данной окружности, если известно, что $\angle BAL = 2\angle BEO$, а $DE = \sqrt{3}$.

**8.** Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенствами

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4x - 4y - 6, \\ x \ge 1. \end{cases}$$

# § 9. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

В этом параграфе кроме уже имеющихся формул и теорем будем использовать еще несколько фактов, которые касаются непосредственно четырехугольников. Сформулируем несколько утверждений.

**Теорема 1.** Площадь трапеции равна произведению полусуммы длин оснований на высоту.

**Теорема 2.** Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, опущенную на данное основание, или произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.

**Теорема 3.** В параллелограмме сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин его сторон.

**Теорема 4.** Площадь произвольного выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

**Теорема 5.** Площадь четырехугольника, описанного около окружности, равна произведению полупериметра этого четырехугольника на радиус данной окружности.

**Теорема 6.** Четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон произвольного выпуклого четырехугольника, есть параллелограмм, площадь которого равна половине площади исходного четырехугольника.

**Теорема 7.** Если у выпуклого четырехугольника диагонали взаимно перпендикулярны, то суммы квадратов противоположных сторон этого четырехугольника равны.

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Длины боковых сторон трапеции равны 3 и 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность.

Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно 5/11. Найти длины оснований трапеции.

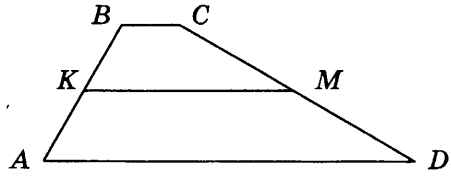


Рис. 88

*Решение.* Пусть $ABCD$ — данная в условии задачи трапеция, $AB = 3$ и $CD = 5$ — ее боковые стороны, точки $K$ и $M$ — середины сторон $AB$ и $CD$ соответственно (рисунок 88). Пусть, для определенности, $AD > BC$, тогда площадь трапеции $AKMD$ будет больше площади трапеции $KBCM$. Так как $KM$ — средняя линия трапеции $ABCD$, то трапеции $AKMD$ и $KBCM$ имеют равные высоты. Поскольку площадь трапеции равна произведению полусуммы длин оснований на высоту, то верно следующее равенство:

$$\frac{S_{AKMD}}{S_{KBCM}} = \frac{AD + KM}{KM + BC} = \frac{11}{5}.$$

Далее, так как в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность, то $AD + BC = AB + CD = 8$. Тогда $KM = 4$ как средняя линия трапеции $ABCD$. Пусть $BC = x$, тогда $AD = 8 - x$. Имеем:

$$\frac{S_{AKMD}}{S_{KBCM}} = \frac{x + 4}{12 - x} = \frac{5}{11} \Leftrightarrow x = 1.$$

Значит, $BC = 1$ и $AD = 7$.

Ответ: 1 и 7.

**Пример 2.** В трапеции длина средней линии равна 4, а углы при одном из оснований имеют величины 40° и 50°. Найти длины оснований трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины этих оснований, равна 1.

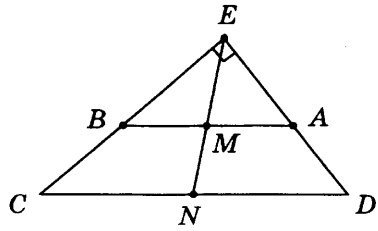


Рис. 89

*Решение.* Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $AB$ и $CD$ — ее основания ($AB < CD$), $M$, $N$ — середины $AB$ и $CD$ соответственно. Пусть также $\angle ADC = 50°$, $\angle BCD = 40°$ (рисунок 89). Длина средней линии трапеции равна полусумме длин оснований, поэтому $AB + CD = 8$. Продлим боковые стороны $DA$ и $CB$ до пересечения в точке $E$. Рассмотрим треугольник $ABE$, в котором $\angle EAB = 50°$, $\angle EBA = 40°$, следовательно $\angle AEB = 90°$. Медиана $EM$ этого треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы: $EM = AM$. Пусть $EM = x$, тогда $AM = x$, $DN = 4 - x$. Согласно условию задачи $MN = 1$, следовательно, $EN = x + 1$, так как точки $E$, $M$ и $N$ лежат на одной прямой. Поскольку $EN = DN$, имеем: $x + 1 = 4 - x$, откуда $x = \frac{3}{2}$. Это означает, что $AB = 3$ и $CD = 5$.

Ответ: 3 и 5.

**Пример 3.** Основание $AB$ трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания $CD$ и вдвое длиннее боковой стороны $AD$. Длина диагонали $AC$ равна $a$, а длина боковой стороны $BC$ равна $b$. Найти площадь трапеции.

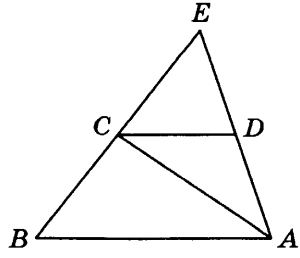


Рис. 90

*Решение.* Пусть $E$ — точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции. Пусть $CD = x$, тогда $AD = x$, $AB = 2x$ (рисунок 90). Отрезок $CD$ параллелен отрезку $AB$ и вдвое его короче, значит, $CD$ является средней линией треугольника $ABE$. Следовательно, $CE = BC = b$ и $DE = AD = x$, откуда $AE = 2x$. Итак, треугольник $ABE$ равнобедренный ($AB = AE$) и $AC$ — его медиана. Поэтому $AC$ является и высотой этого треугольника, и значит, $S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2} BE \cdot AC = ab$.

Так как треугольник $DEC$ подобен треугольнику $AEB$ с коэффициентом подобия $k = \frac{1}{2}$, то

$$S_{\Delta DEC} = \frac{1}{4} S_{\Delta AEB} = \frac{ab}{4} \quad \Rightarrow \quad S_{ABCD} = \frac{3ab}{4}.$$

Ответ: $\frac{3ab}{4}$.

**Пример 4.** В трапецию $ABCD$ с основаниями $BC$ и $AD$ и с боковыми сторонами $AB$ и $CD$ вписана окружность с центром $O$. Найти площадь трапеции, если угол $DAB$ прямой, $OC = 2$ и $OD = 4$.

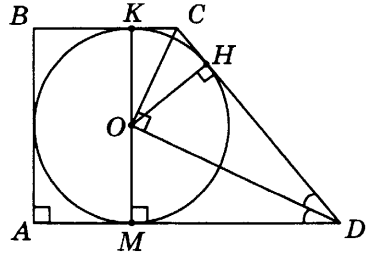


Рис. 91

*Решение.* Пусть $K$, $H$, $M$ — точки касания окружности со сторонами $BC$, $CD$, $DA$ соответственно. Пусть $r$ — радиус данной окружности (рисунок 91). Поскольку прямые $AB$ и $AD$ перпендикулярны, то $AB = KM = 2r$. Центр $O$ вписанной окружности есть точка пересечения биссектрис внутренних углов трапеции. Поэтому $\angle BCO = \angle OCD$ и $\angle CDO = \angle ODA$. Тогда из равенства $\angle BCD + \angle CDA = 180°$ получаем, что

$\angle OCD + \angle ODC = 90°$ и $\angle COD = 90°$. Применив к треугольнику $COD$ теорему Пифагора, получим, что $CD = \sqrt{CO^2 + OD^2} = 2\sqrt{5}$.

Так как касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, то $OH$ — высота треугольника $COD$. Найдем длину этой высоты как произведение длин катетов, деленное на длину гипотенузы прямоугольного треугольника $COD$: $OH = \frac{4}{\sqrt{5}} = r$. Так как в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность, то суммы длин противоположных сторон этой трапеции равны: $AB + CD = BC + AD$, и полупериметр трапеции равен $p = AB + CD = 2r + 2\sqrt{5} = \frac{18}{\sqrt{5}}$. Тогда площадь трапеции равна произведению полупериметра этой трапеции на радиус вписанной окружности и равна $S_{ABCD} = pr = 14{,}4$.

Ответ: 14,4.

**Пример 5.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины диагоналей, равна длине отрезка, соединяющего середины сторон $AD$ и $BC$. Найдите величину угла, образованного продолжением сторон $AB$ и $CD$.

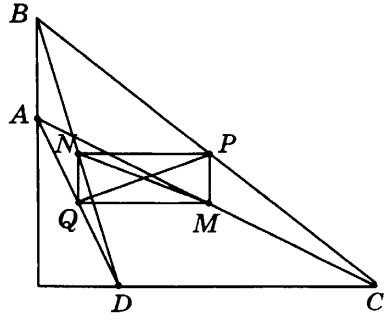


Рис. 92

*Решение.* Пусть $M$ и $N$ — соответственно середины диагоналей $AC$ и $BD$; $P$ и $Q$ — соответственно середины сторон $BC$ и $AD$ (рисунок 92). Отрезок $NQ$ является средней линией треугольника $ABD$, следовательно, он параллелен прямой $AB$

и его длина равна половине длины отрезка $AB$. Аналогично отрезок $PM$ является средней линией треугольника $ABC$, поэтому он также параллелен прямой $AB$ и его длина равна половине длины отрезка $AB$. Значит, отрезки $NQ$ и $PM$ параллельны и равны по длине, поэтому четырехугольник $MPNQ$ есть параллелограмм.

Согласно условию задачи диагонали $PQ$ и $MN$ параллелограмма $MPNQ$ равны. Следовательно, $MPNQ$ — прямоугольник, в частности, прямая $MP$ перпендикулярна прямой $PN$. Далее, так как $MP$ — средняя линия треугольника $ABC$, то эта прямая параллельна прямой $AB$, а так как $PN$ — средняя линия треугольника $BCD$, то эта прямая параллельна прямой $CD$. Следовательно, угол между прямыми $AB$ и $CD$ такой же, как между прямыми $MP$ и $PN$, то есть прямой угол.

Ответ: 90°.

**Пример 6.** В квадрат площадью 18 вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника. Длины сторон прямоугольника относятся как 1 : 2. Найдите площадь прямоугольника.

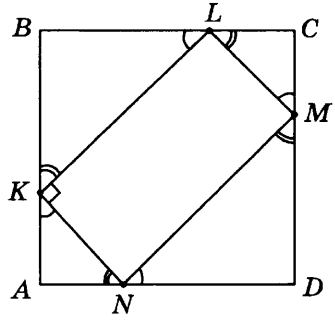


Рис. 93

*Решение.* Пусть $ABCD$ — данный квадрат, $KLMN$ — вписанный в него прямоугольник, при этом точки $K$, $L$, $M$ и $N$ лежат на сторонах $AB$, $BC$, $CD$ и $AD$ соответственно (рисунок 93). Пусть также $KN = LM = x$, $KL = MN = 2x$, $\angle AKN = \alpha$. Докажем, что $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Так как угол $LKN$ — прямой, то

$\angle BKL = 90° - \alpha$ и $\angle BLK = \alpha$. Аналогично $\angle CLM = 90° - \alpha$ и $\angle CML = \alpha$. Из прямоугольного треугольника $AKN$ получаем, что $AK = x\cos\alpha$, из прямоугольного треугольника $BKL$ находим, что $KB = 2x\sin\alpha$, $BL = 2x\cos\alpha$, а из прямоугольного треугольника $CLM$ получаем, что $LC = x\sin\alpha$. Равенство сторон квадрата $AB = BC$ дает нам равенство

$$AK + KB = BL + LC \Leftrightarrow x\cos\alpha + 2x\sin\alpha = 2x\cos\alpha + x\sin\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha,$$

откуда $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Следовательно, $AK = \frac{x}{\sqrt{2}}$, $KB = \frac{2x}{\sqrt{2}}$. Так как площадь квадрата равна 18, имеем следующее равенство: $18 = \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{2x}{\sqrt{2}}\right)^2$, откуда $x = 2$. Значит, площадь прямоугольника $KLMN$ равна $S_{KLMN} = KN \cdot KL = 2x^2 = 8$.

Ответ: 8.

**Пример 7.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол $A$ равен 90°, а угол $C$ не превосходит 90°. Из вершин $B$ и $D$ на диагональ $AC$ опущены перпендикуляры $BE$ и $DF$. Известно, что $AE = CF$. Доказать, что угол $C$ прямой.

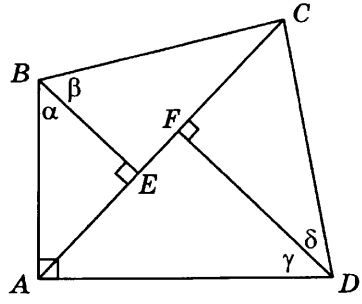


Рис. 94

*Решение.* Без ограничения общности можно считать, что $AE < AF$ (в противном случае следует повторить все нижеследующие рассуждения с заменой точек $B$ и $D$). Пусть $\angle ABE = \alpha$, $\angle EBC = \beta$, $\angle ADF = \gamma$, $\angle FDC = \delta$ (рисунок 94). Достаточно доказать, что $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$. Так как

$$\frac{\pi}{2} = \angle BAD = \angle BAE + \angle FAD = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \pi - \alpha - \gamma,$$

то $\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}$ и, в частности, $\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\gamma = 1$. Далее имеем:

$$\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\delta = \frac{CE}{BE} \cdot \frac{CF}{DF} = \frac{AF}{BE} \cdot \frac{AE}{DF} = \frac{AF}{DF} \cdot \frac{AE}{BE} = \mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\alpha = 1,$$

откуда получаем, что $\beta + \delta = \frac{\pi}{2}$, что и требовалось доказать.

**Пример 8.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки $E$, $F$, $H$, $G$ являются соответственно серединами отрезков $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ и $O$ — точка пересечения отрезков $EH$ и $FG$. Известно, что $EH = a$, $FG = b$, $\angle FOH = \frac{\pi}{3}$. Найти длины диагоналей четырехугольника $ABCD$.

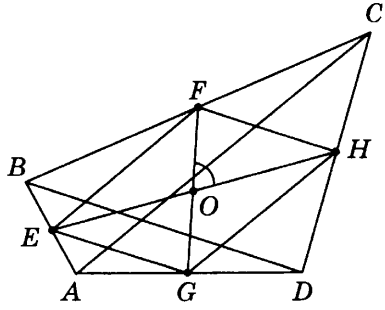


Рис. 95

*Решение.* Известно, что если соединить последовательно середины сторон произвольного выпуклого четырехугольника, то получится параллелограмм (теорема 6). В нашем случае $EFHG$ — параллелограмм и $O$ — точка пересечения его диагоналей. В частности, $EO = OH = \frac{a}{2}$, $GO = OF = \frac{b}{2}$ (рисунок 95). Применим к треугольнику $FOH$ теорему косинусов:

$$FH = \sqrt{OF^2 + OH^2 - 2OF \cdot OH \cdot \cos\angle FOH} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{2}.$$

Так как $FH$ — средняя линия треугольника $BCD$, то $BD = 2FH = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$. Аналогично, применив теорему косинусов к треугольнику $EOF$, получим, что $EF = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$, откуда $AC = 2EF = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$.

Ответ: $AC = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$, $BD = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$.

**Пример 9.** В равнобокой трапеции диагональ имеет длину 8 и является биссектрисой одного из углов. Может ли одно из оснований этой трапеции быть меньше 4, а другое равно 5?

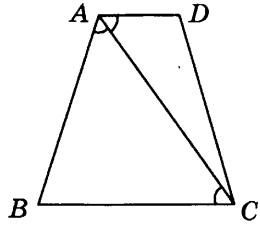


Рис. 96

*Решение.* Допустим, что описанная ситуация возможна. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $AD$ и $BC$ — ее основания, диагональ $AC$ является биссектрисой угла $BAD$ (рисунок 96). Имеем: $\angle BAC = \angle CAD = \angle ACB$, следовательно, треугольник $ABC$ равнобедренный: $AB = BC$. Значит, основание $AD$ меньше 4, а основание $BC$ равно 5 (в противном случае $AB + BC < 4 + 4 = 8 = AC$, что противоречит неравенству треугольника) и $AB = BC = CD = 5$. Далее, обозначая угол $CAD$ через $\alpha$, находим, что угол $CDA$ равен $2\alpha$ и угол $ACD$ равен $\pi - 3\alpha$. Рассматривая треугольник $ABC$, получаем, что $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Так как $\cos\alpha = \frac{4}{5} > \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$, то $\alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha < \pi - 3\alpha$, то есть угол $CAD$ меньше угла $ACD$. Однако в треугольнике $ACD$ напротив меньшего угла $CAD$ должна лежать меньшая сторона $CD$, что противоречит уже полученному соотношению $CD = 5 > 4 > AD$. Итак, противоречие показывает, что исходное предположение о возможности описанной в условии задачи конфигурации является неверным.

Ответ. Не может.

**Пример 10.** В ромбе $ABCD$ высоты $BP$ и $BQ$ пересекают диагональ $AC$ в точках $M$ и $N$ ($M$ между $A$ и $N$), $AM = p$, $MN = q$. Найти $PQ$.

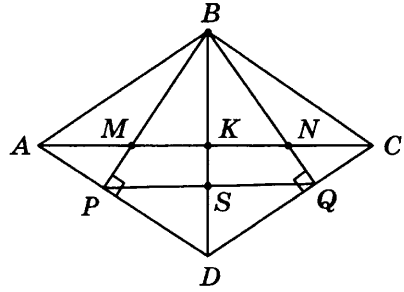


Рис. 97

*Решение.* Пусть $K$ — точка пересечения диагоналей $AC$ и $BD$, $S$ — точка пересечения $BD$ и $PQ$. Ясно, что $PQ = 2PS$, найдем $PS$ (рисунок 97). Применим к треугольнику $DAK$ и секущей $PM$ теорему Менелая: $\frac{DP}{PA} \cdot \frac{AM}{MK} \cdot \frac{KB}{BD} = 1$. Ясно, что $KB : BD = 1 : 2$ и $AM : MK = 2p : q$, откуда $\frac{DP}{PA} = \frac{q}{p} \Rightarrow \frac{AD}{AP} = \frac{p+q}{p}$. Из подобия треугольников $DPS$ и $DAK$ получаем следующее равенство:

$$\frac{PS}{AK} = \frac{PD}{AD} \Leftrightarrow PS = \frac{AK \cdot PD}{AD} = AK(1 - \frac{AP}{AD}) =$$

$$= (p + \frac{q}{2})(1 - \frac{p}{p+q}) = \frac{q(2p+q)}{2(p+q)}.$$

Значит, $PQ = \frac{2pq + q^2}{p+q}$.

Ответ: $\frac{2pq + q^2}{p+q}$.

**Пример 11.** Через вершины $A$, $B$ и $C$ параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ и $BC = 5$ проведена окружность, пересекающая прямую $BD$ в точке $E$, причем $BE = 9$. Найти диагональ $BD$.

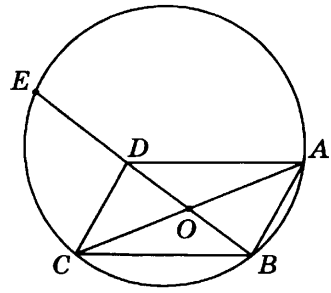


Рис. 98

*Решение.* Так как, согласно неравенству треугольника, $BD < AB + BC = 8$, а $BE = 9$, то точка $D$ лежит внутри данной окружности (рисунок 98). Пусть $O$ — точка пересечения диагоналей параллелограмма, $BO = OD = x$, $DE = 9 - 2x$, $AO = OC = y$. Так как $AC$ и $BE$ — пересекающиеся хорды одной окружности, то $AO \cdot OC = BO \cdot OE$, откуда $y^2 = x(9 - x)$.

Согласно теореме 3 (сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон) имеем равенство: $(2x)^2 + (2y)^2 = 2(3^2 + 5^2)$ или $x^2 + y^2 = 17$. Из полученных равенств легко находим, что $x = \frac{17}{9}$ и $BD = \frac{34}{9}$.

Ответ: $\frac{34}{9}$.

**Пример 12.** Площадь четырехугольника $ABCD$ равна 9, радиус вписанной в него окружности равен 1, а длины сторон $AB$ и $BC$ равны 3 и 5 соответственно. Чему равны длины сторон $AD$ и $CD$?

*Решение.* Пусть $CD = x$, $AD = y$. Так как четырехугольник $ABCD$ описан около окружности, то суммы длин его противоположных сторон равны: $AB + CD = AD + BC$ или $3 + x = 5 + y$. С другой стороны (теорема 5), площадь этого четырехугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности. Имеем:

$$S=\frac{1}{2}(AB+BC+CD+AD)\cdot r \text{ или } 9=\frac{1}{2}(8+x+y).$$

Из этих двух равенств легко находим, что $x = 6$ и $y = 4$.

Ответ: $AD = 4$, $CD = 6$.

**Пример 13.** В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Пусть $K$ — точка пересечения его диагоналей. Известно, что $AB > BC > KC$, $BK = 4+\sqrt{2}$, а периметр и площадь треугольника $BKC$ равны соответственно 14 и 7. Найти $DC$.

*Решение.* Пусть $KC = x$, $BC = y$ ($x < y$). Тогда периметр треугольника $BKC$ равен $x+y+4+\sqrt{2}$, а его площадь вычислим по формуле Герона. Имеем:

$$\begin{cases} x+y+4+\sqrt{2}=14, \\ \sqrt{7(7-x)(7-y)(7-4-\sqrt{2})}=7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=10-\sqrt{2}, \\ (7-x)(7-y)=\dfrac{7}{3-\sqrt{2}}=3+\sqrt{2}. \end{cases}$$

Если обозначить теперь $7 - x = u$ и $7 - y = v$ ($u > v$ так как $x < y$), получим, что $uv = 3+\sqrt{2}$ и $u+v = 4+\sqrt{2}$, откуда $u = 3+\sqrt{2}$ и $v = 1$. Возвращаясь к переменным $x$ и $y$, находим, что $x = 4-\sqrt{2}$, $y = 6$. Таким образом, треугольник $BKC$ — прямоугольный (так как $(4+\sqrt{2})^2+(4-\sqrt{2})^2 = 6^2$), и угол $BKC$ равен 90°.

Докажем следующее утверждение. Пусть в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность и диагонали этого четырехугольника взаимно перпендикулярны. Тогда либо $AB = BC$ и $AD = DC$, либо $AB = AD$ и $CB = CD$. Пусть, для удобства, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $AD = d$. Согласно первому из условий получаем равенство $a + c = b + d$. Второе условие (теорема 7) дает соотношение $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Имеем:

$$\begin{cases} a+c=b+d, \\ a^2+c^2=b^2+d^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=d-c, \\ a^2-b^2=d^2-c^2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=d-c, \\ (a-b)(a+b)=(d-c)(d+c), \end{cases}$$

откуда либо $a = b$, $d = c$, либо

$$\begin{cases} a - b = d - c, \\ a + b = d + c, \end{cases}$$

что означает $a = d$ и $b = c$.

По условию задачи $AB \neq BC$. Тогда из приведенных выше рассуждений следует, что $DC = BC = 6$.

Ответ: 6.

**Пример 14.** Пусть $M$ — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором стороны $AB$, $AD$ и $BC$ равны между собой. Найти угол $CMD$, если известно, что $DM = MC$, а $\angle CAB \neq \angle DBA$.

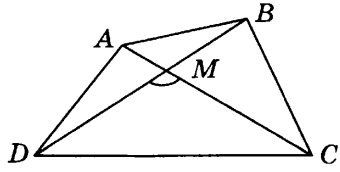


Рис. 99

*Решение.* Пусть $AB = AD = BC = a$, $DM = MC = b$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle DBA = \beta$, $\alpha \neq \beta$, $\angle AMD = \angle CMB = \varphi$. Применим к треугольникам $AMD$ и $CMB$ теорему синусов (рисунок 99). Имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{AD}{\sin\angle AMD} = \dfrac{MD}{\sin\angle DAC}, \\ \dfrac{BC}{\sin\angle CMB} = \dfrac{MC}{\sin\angle CBD}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\sin\varphi} = \dfrac{b}{\sin\angle DAC}, \\ \dfrac{a}{\sin\varphi} = \dfrac{b}{\sin\angle CBD}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\angle DAC = \sin\angle CBD.$$

Это означает, что либо $\angle DAC = \angle CBD$, либо $\angle DAC + \angle CBD = 180°$. В первом случае мы получаем равные треугольники $AMD$ и $CMB$, откуда следует равенство отрезков $AM$ и $BM$, что противоречит условию $\angle CAB \neq \angle DBA$. Значит, $\angle DAC + \angle CBD = 180°$. Пусть $\angle DAC = \gamma$, тогда $\angle CBD = 180° - \gamma$.

Складывая все углы в треугольниках $AMD$ и $CMB$, находим, что

$$360° = (\beta + \gamma + \varphi) + (\alpha + (180° - \gamma) + \varphi) \Leftrightarrow \alpha + \beta + 2\varphi = 180°.$$

С другой стороны, $\varphi = \alpha + \beta$ как внешний угол треугольника $ABM$. Из двух полученных равенств вытекает, что $\varphi = 60°$ и $\angle CMD = 120°$.

Ответ: 120°.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**1.** В трапеции диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найти площадь трапеции.

**2.** В выпуклом четырехугольнике длины диагоналей равны 1 и 2. Найти площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющие середины его противоположных сторон, равны.

**3.** Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 26. Величина угла $ABC$ равна 120°. Радиус окружности, вписанной в треугольник $BCD$, равен $\sqrt{3}$. Найти длины сторон параллелограмма, если известно, что $AD > AB$.

**4.** Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найти площадь трапеции, если ее средняя линия равна 5.

**5.** В трапеции $KLMN$ боковые стороны $KL = 36$, $MN = 34$, верхнее основание $LM = 10$ и $\angle KLM = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. Найти диагональ $LN$.

**6.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются под углом 60°, а их длины относятся как 1 : 3. Чему равна меньшая диагональ четырехугольника $ABCD$, если большая равна $\sqrt{39}$?

**7.** В трапеции $ABCD$ боковая сторона $AB$ перпендикулярна основаниям и имеет длину 6. Длина основания $AD$ равна 8, а длина отрезка $DO$, где $O$ — точка пересечения диагоналей трапеции, равна 6. Найти площадь треугольника $COD$.

**8.** В трапеции $ABCD$ с основаниями $AB$ и $CD$ известно, что $AC = a$, $BD = \frac{7a}{5}$, а угол $CAB$ вдвое больше угла $DBA$. Найти площадь трапеции.

**9.** Точка $O$ лежит на диагонали $AC$ выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что $OC = OD$ и что точка $O$ одинаково удалена от прямых $DA$, $AB$ и $BC$. Найти углы четырехугольника, если $\angle AOB = 130°$ и $\angle COD = 90°$.

**10.** Около окружности радиуса 3 описана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями $BC$ и $AD$, площадь которой равна 48. Окружность касается сторон $AB$ и $CD$ в точках $K$ и $L$. Найти $KL$.

**11.** В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ $AC$. Точка $O$ является центром окружности, вписанной в треугольник $ABC$. Расстояния от точки $O$ до точки $A$ и прямых $AD$ и $AC$ соответственно равны 10, 8 и 6. Найти площадь параллелограмма $ABCD$.

**12.** В трапеции $ABCD$ ($AB$ — основание) величины углов $DAB$, $BCD$, $ADC$, $ABD$ и $ADB$ образуют арифметическую прогрессию (в том порядке, в котором они написаны). Найти расстояние от вершины $C$ до диагонали $BD$, если высота трапеции равна $h$.

**13.** В выпуклом четырехугольнике $MNLQ$ углы при вершинах $N$ и $L$ прямые, а величина угла при вершине $M$ равна $\frac{2}{3}$. Найти длину диагонали $NQ$, если известно, что длина стороны $LQ$ вдвое меньше длины стороны $MN$ и на 2 больше длины стороны $LN$.

**14.** Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Найти углы трапеции.

**15.** Выпуклый четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром в точке $O$, при этом $AO = OC = 1$, $BO = OD = 2$. Найти периметр четырехугольника $ABCD$.

**16.** Диагонали вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $E$, причем $\angle ADB = \frac{\pi}{8}$, $BD = 6$ и $AD \cdot CE = DC \cdot AE$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

**17.** В четырехугольнике $ABCD$ диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $K$. Точки $L$ и $M$ являются соответственно серединами сторон $BC$ и $AD$. Отрезок $LM$ содержит точку $K$. Четырехугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать окружность. Найти радиус этой окружности, если $AB = 3$, $AC = \sqrt{13}$ и $LK : KM = 1 : 3$.

**18.** Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, перпендикулярны. Известно, что $AC = 4$, $\angle CAB + \angle DBA = 75°$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$ и сравнить ее с числом $2\sqrt{15}$.

**19.** Произведение длины средней линии трапеции и длины отрезка, соединяющего середины ее диагоналей, равно 25. Найти площадь трапеции, если ее высота втрое больше разности оснований.

**20.** Биссектрисы внутренних углов в параллелограмме $ABCD$ образуют четырехугольник $EFGH$, каждая вершина которого получена как пересечение двух биссектрис. Найти сумму квадратов длин всех сторон в четырехугольнике $EFGH$, если известно, что $AB - CD = \frac{3}{2}$.

**21.** Площадь четырехугольника $PQRS$ равна 48. Кроме того, известно, что $PQ = QR = 6$, $RS = SP$ и ровно три вершины $P$, $Q$ и $R$ лежат на окружности радиуса 5. Найти длины сторон $RS$ и $SP$.

**22.** В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Каждая его диагональ делит его площадь в отношении 2 : 3. Найти тангенсы всех углов четырехугольника $ABCD$ и радиус окружности, описанной около четырехугольника, если наибольшая сторона его имеет длину 24.

# § 10. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ И ФОРМУЛ

**Доказательство теоремы 3 параграфа 1:**

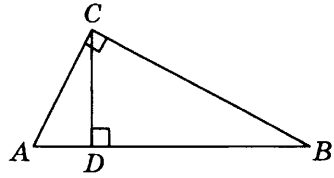


Рис. 100

Построим прямоугольный треугольник $ABC$ с прямым углом при вершине $C$ и проведем высоту $CD$ этого треугольника (рисунок 100). Докажем первое из равенств. Из подобия треугольников $ACD$ и $CBD$ (по двум углам) следует, что

$$\frac{AD}{CD} = \frac{DC}{DB} \Leftrightarrow CD^2 = AD \cdot DB \Leftrightarrow h^2 = c_a \cdot c_b.$$

Для доказательства второго равенства рассмотрим подобные треугольники $ABC$ и $CBD$. Имеем:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{BC}{BD} \Leftrightarrow BC^2 = AB \cdot BD \Leftrightarrow a^2 = c \cdot c_a.$$

Третье равенство доказывается аналогично второму.

**Доказательство теоремы 3 параграфа 2:**

Докажем только формулу Герона. Запишем теорему косинусов $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos\gamma$ и формулу площади $4S = 2ab\sin\gamma$. Возводя эти равенства в квадрат и складывая, получаем, что

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 + 16S^2 = 4a^2b^2,$$

откуда

$$16S^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (2ab - a^2 - b^2 + c^2)(2ab + a^2 + b^2 - c^2) =$$
$$= (c^2 - (a-b)^2)((a+b)^2 - c^2) = (c + a - b)(c + b - a)(a + b - c)(a + b + c).$$

Значит,

$$S^2 = \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

что и требовалось доказать.

**Доказательство теоремы 1 параграфа 3:**

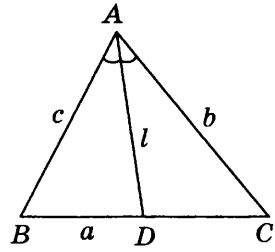


Рис. 101

Построим треугольник $ABC$ и проведем в нем биссектрису $AD$ (рисунок 101). Имеем:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{bc \sin \alpha}{2}.$$

С другой стороны,

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD + \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin \angle CAD =$$

$$= \frac{cl_a \sin \frac{\alpha}{2} + bl_a \sin \frac{\alpha}{2}}{2}.$$

Приравнивая полученные двумя способами значения площади треугольника $ABC$, имеем:

$$\frac{bc \sin \alpha}{2} = \frac{cl_a \sin \frac{\alpha}{2} + bl_a \sin \frac{\alpha}{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad l_a = \frac{2bc \cos \frac{\alpha}{2}}{b + c}.$$

При этом мы использовали формулу $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$.

**Доказательство теоремы 2 параграфа 3:**

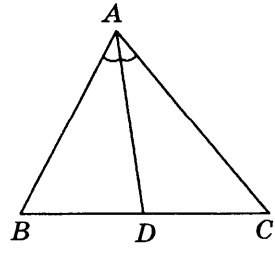


Рис. 102

Построим треугольник $ABC$ и проведем в нем биссектрису $AD$ (рисунок 102). Пусть $CD = x$ и $BD = y$. Применим к треугольникам $ABD$ и $ACD$ теорему косинусов:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos \angle BAD;$$

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2 \cdot AC \cdot AD \cdot \cos \angle CAD.$$

Или, что то же самое

$$y^2 = c^2 + l_a^2 - 2cl_a \cos\frac{\alpha}{2}; \qquad x^2 = b^2 + l_a^2 - 2bl_a \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Выразим из каждого равенства $\cos\frac{\alpha}{2}$ и приравняем полученные результаты:

$$\frac{c^2 + l_a^2 - y^2}{2cl_a} = \frac{b^2 + l_a^2 - x^2}{2bl_a} \Leftrightarrow bc^2 + bl_a^2 - by^2 = cb^2 + cl_a^2 - cx^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow bc(c - b) + cx^2 - by^2 = l_a^2(c - b).$$

Применив теперь к треугольнику $ABC$ теорему о биссектрисе внутреннего угла, получим:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD} \Leftrightarrow \frac{b}{c} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow y = \frac{cx}{b}.$$

Отдельно преобразуем выражение $cx^2 - by^2$:

$$cx^2 - by^2 = cx^2 - b\left(\frac{cx}{b}\right)^2 = cx^2 - \frac{c^2x^2}{b} = cx^2\left(1 - \frac{c}{b}\right) =$$

$$= \frac{cx^2(b - c)}{b} = xy(b - c).$$

Последнее равенство верно в силу того, что $y = \frac{cx}{b}$. Имеем далее:

$$bc(c-b) + cx^2 - by^2 = l_a^2(c-b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow bc(c-b) + xy(b-c) = l_a^2(c-b).$$

Если $c \neq b$, то, сократив обе части равенства на $(c - b)$, получим требуемую формулу, если же $c = b$, то данная теорема сводится к теореме Пифагора.

**Доказательство теоремы 4 параграфа 3:**

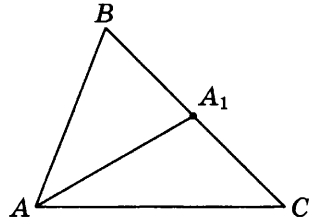


Рис. 103

Построим треугольник $ABC$ и проведем в нем медиану $AA_1$ (рисунок 103). Применим в треугольниках $AA_1B$ и $AA_1C$ теорему косинусов:

$$AB^2 = AA_1^2 + A_1B^2 - 2AA_1 \cdot A_1B \cdot \cos \angle AA_1B;$$

$$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos \angle AA_1C.$$

Или, что то же самое,

$$c^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - am_a \cos \varphi; \qquad b^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - am_a \cos(\pi - \varphi),$$

где $\varphi = \angle AA_1B$. Так как $\cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$, то сложив последние два равенства, получим

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

**Доказательство теоремы 5 параграфа 4:**

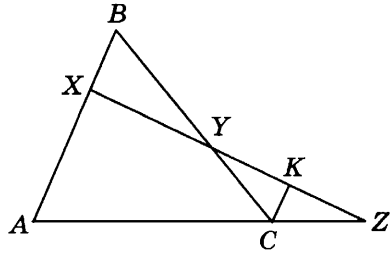


Рис. 104

Проведем через точку $C$ прямую, параллельную прямой $AB$, до пересечения с прямой $XZ$ в точке $K$ (рисунок 104). Надо доказать, что

$$\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CZ}{ZA}=1.$$

Рассмотрим две пары подобных треугольников.

$$\Delta CKZ \sim \Delta AXZ \quad \Rightarrow \quad \frac{CZ}{AZ}=\frac{CK}{AX};$$

$$\Delta XBY \sim \Delta KCY \quad \Rightarrow \quad \frac{BY}{CY}=\frac{XB}{KC}.$$

Перемножив почленно эти равенства, получим

$$\frac{CZ}{ZA}\cdot\frac{BY}{YC}=\frac{XB}{AX} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AX}{XB}\cdot\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CZ}{ZA}=1,$$

что и требовалось доказать.

**Доказательство теоремы 6 параграфа 4:**

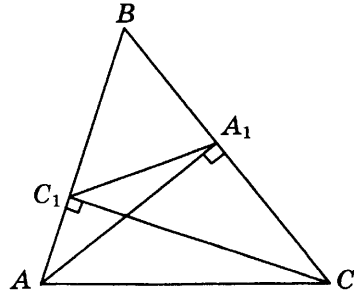


Рис. 105

Докажем подобие треугольников $A_1BC_1$ и $ABC$ при помощи первого признака подобия (рисунок 105). Так как эти два треугольника имеют общий угол $B$, достаточно доказать, что

$$\frac{BA_1}{BA}=\frac{BC_1}{BC}.$$

Но это следует из того, что $\frac{BA_1}{BA}=\cos\angle B$ из прямоугольного треугольника $ABA_1$, а $\frac{BC_1}{BC}=\cos\angle B$ из прямоугольного треугольника $CBC_1$. Попутно доказана и вторая часть теоремы.

**Доказательство теоремы 6 параграфа 7:**

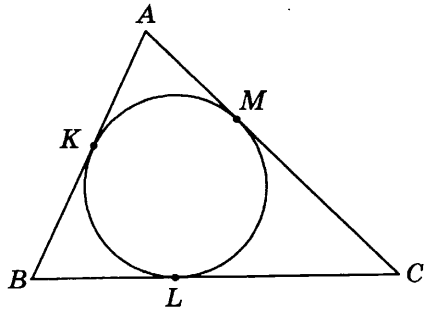


Рис. 106

Пусть окружность, вписанная в треугольник $ABC$, касается сторон $AB$, $BC$ и $AC$ этого треугольника соответственно в точках $K$, $L$ и $M$ (рисунок 106). Так как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны, то $AK = AM = x$, $BK = BL = y$, $CL = CM = z$. Пусть стороны треугольника равны $AB = c$, $BC = a$ и $AC = b$. Имеем:

$$\begin{cases} x + y = c, \\ y + z = a, \\ x + z = b; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b + c - a}{2} = p - a.$$

Следовательно, $AK = p - BC$.

**Доказательство теоремы 7 параграфа 7:**

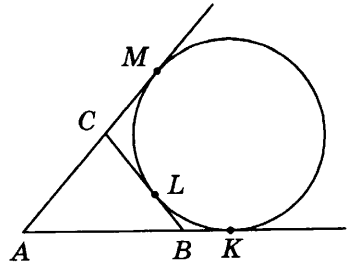


Рис. 107

Пусть окружность касается продолжения стороны $AB$ треугольника $ABC$ в точке $K$, стороны $BC$ этого треугольника в точке $L$, продолжения стороны $AC$ — в точке $M$ (рисунок 107).

Так как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны, то $AK = AM = x$, $BK = BL = y$, $CL = CM = z$. Пусть стороны треугольника равны $AB = c$, $BC = a$ и $AC = b$. Имеем:

$$\begin{cases} x - y = c, \\ y + z = a, \\ x - z = b; \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{b + c + a}{2} = p.$$

Следовательно, $AK = p$.

**Доказательство теоремы 3 параграфа 9:**

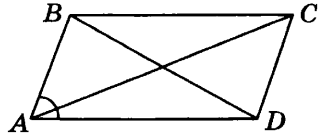


Рис. 108

Пусть $ABCD$ — параллелограмм, $AB = CD = a$, $AD = BC = b$, $AC = d_1$, $BD = d_2$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle ADC = 180° - \alpha$ (рисунок 108). Применим к треугольнику $ABD$ теорему косинусов:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 + 2AB \cdot AD \cdot \cos\angle BAD \Leftrightarrow d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

Применив теперь теорему косинусов к треугольнику $ACD$, получим, что

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos\angle ADC \Leftrightarrow d_1^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha.$$

Складывая почленно полученные равенства, находим, что

$$2a^2 + 2b^2 = d_1^2 + d_2^2,$$

что и требовалось доказать.

**Доказательство теоремы 4 параграфа 9:**

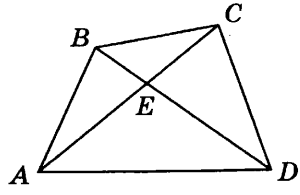


Рис. 109

Пусть $ABCD$ — произвольный выпуклый четырехугольник, $E$ — точка пересечения его диагоналей, $AE = a$, $BE = b$, $CE = c$, $DE = d$, $\angle AEB = \angle CED = \varphi$, $\angle BEC = \angle DEA = 180° - \varphi$ (рисунок 109). Имеем:

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABE} + S_{\Delta BEC} + S_{\Delta CED} + S_{\Delta DEA} =$$

$$= \frac{1}{2} AE \cdot BE \cdot \sin\angle AEB + \frac{1}{2} BE \cdot CE \cdot \sin\angle BEC +$$

$$+ \frac{1}{2} CE \cdot DE \cdot \sin\angle CED + \frac{1}{2} AE \cdot DE \cdot \sin\angle AED =$$

$$= \frac{\sin\varphi}{2} \cdot (ab + bc + cd + ad) = \frac{\sin\varphi}{2} \cdot (a + c)(b + d) = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\varphi,$$

что и требовалось доказать.

**Доказательство теоремы 5 параграфа 9:**

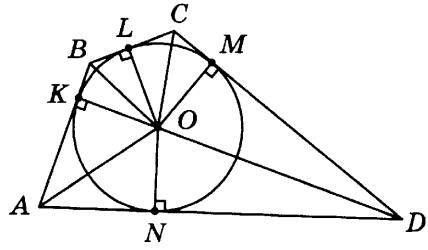


Рис. 110

Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник, описанный около окружности, $O$ — центр этой окружности, $OK$, $OL$, $OM$ и $ON$ — перпендикуляры, опущенные из точки $O$ на прямые $AB$, $BC$, $CD$ и $AD$ соответственно (рисунок 110). Имеем:

$$S_{ABCD} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COD} + S_{\Delta AOD} =$$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot OK + \frac{1}{2} BC \cdot OL + \frac{1}{2} CD \cdot OM + \frac{1}{2} AD \cdot ON =$$

$$= \frac{r}{2} (AB + BC + CD + AD) = pr,$$

где $r$ — радиус окружности, а $p$ — полупериметр четырехугольника $ABCD$.

**Доказательство теоремы 6 параграфа 9:**

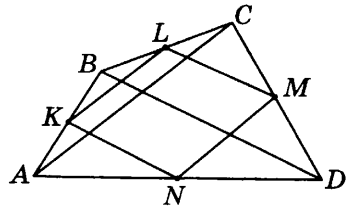


Рис. 111

Пусть $ABCD$ — произвольный выпуклый четырехугольник, $K$, $L$, $M$ и $N$ — середины сторон $AB$, $BC$, $CD$ и $AD$ соответственно (рисунок 111). Так как $KL$ — средняя линия треугольника $ABC$, то прямая $KL$ параллельна прямой $AC$ и $KL = \frac{1}{2}AC$. Аналогично прямая $NM$ параллельна прямой $AC$ и $NM = \frac{1}{2}AC$. Следовательно, $KLMN$ — параллелограмм. Рассмотрим треугольник $KBL$. Его площадь равна четверти площади треугольника $ABC$. Площадь треугольника $NDM$ также равна четверти площади треугольника $ADC$. Следовательно,

$$S_{\Delta KBL} + S_{\Delta NDM} = \frac{1}{4}(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC}) = \frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

Аналогично

$$S_{\Delta KAN} + S_{\Delta LCM} = \frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

Это значит, что

$$S_{\Delta KBL} + S_{\Delta NDM} + S_{\Delta KAN} + S_{\Delta LCM} = \frac{1}{2}S_{ABCD},$$

откуда вытекает, что $S_{KLMN} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

**Доказательство теоремы 7 параграфа 9:**

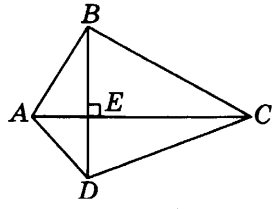


Рис. 112

Пусть $ABCD$ — произвольный выпуклый четырехугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, пусть $E$ — точка пересечения его диагоналей, $AE = a$, $BE = b$, $CE = c$, $DE = d$ (рисунок 112). Применим к треугольникам $ABE$ и $CDE$ теорему Пифагора:

$$AB^2 = AE^2 + BE^2 = a^2 + b^2, \qquad CD^2 = CE^2 + DE^2 = c^2 + d^2,$$

следовательно,

$$AB^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Применив теперь теорему Пифагора к треугольникам $ADE$ и $BCE$, получим, что

$$AD^2 = AE^2 + DE^2 = a^2 + d^2, \quad BC^2 = BE^2 + CE^2 = b^2 + c^2,$$

откуда вытекает, что

$$AD^2 + BC^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Значит, $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$, что и требовалось доказать.

# ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

## § 1. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

1. 202,8.
2. 60.
3. $\sqrt{15+6\sqrt{3}}$.
4. 40.
5. $R\sin 2\alpha$.
6. 2 : 5.
7. 5.
8. 30° и 60°.
9. 2,4.
10. 5/2.
11. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.
12. $2\pi$.

## § 2. ТЕОРЕМЫ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ, ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

1. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\cos\alpha}$.
2. $8\sqrt{3}$.
4. $\sqrt{13}$.
5. $\dfrac{15}{4}$ или $\dfrac{5}{4}$.
6. $2\operatorname{arctg}(5\operatorname{tg}\alpha)$.
7. $2\sqrt{\dfrac{34}{15}}$.
8. $\dfrac{4\sqrt{5}+1}{4}$.

9. $\dfrac{3(3\sqrt{3}-4)}{2}$.

10. $\dfrac{9\sqrt{3}}{11}$.

11. 12/5.

12. $\dfrac{8}{\sqrt{15}}$.

13. $3\sqrt{3} \pm 4$.

14. 2,5 или 3,9.

15. 35/2.

16. $aR$.

17. $\dfrac{16}{3}$, центр вне треугольника; или $\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$, центр внутри треугольника.

18. $\dfrac{9\sqrt{15}}{4}$.

19. $S = 1,\ R = \dfrac{\sqrt{85}}{2}$.

20. $9(3+\sqrt{3})$.

21. 9.

22. 150°.

23. $6\sqrt{\dfrac{3}{19}}$.

24. 11/3.

25. $\sqrt{2}$

## § 3. БИССЕКТРИСА И МЕДИАНА ТРЕУГОЛЬНИКА

1. $\sqrt{14}$.

2. 60.

3. 8.

4. $d\sqrt{2+\dfrac{d}{c}}$.

5. $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 7.

6. $\frac{2bc}{b+c}$.

7. $\frac{c\sin 2\alpha}{2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$.

8. $\frac{\sqrt{(4b^2-a^2)(a^2-b^2)}}{4}$.

9. 6.

10. $\sqrt{7}$.

11. $\frac{l+m}{l+k}$.

12. 17/32.

13. $\frac{\sqrt{190}}{2}$.

14. 60°.

15. $\angle A = \angle C = \operatorname{arctg}3$, $\angle B = \pi - 2\operatorname{arctg}3$; $S = \frac{1}{4}$.

16. $CD = 2$; $S = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$ или $S = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

## § 4. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ И ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. $2\sqrt{7}$.

2. 18/7.

3. 11.

4. 5 и 5/4.

5. $\frac{\pi\operatorname{tg}^2\alpha}{4}$.

6. 18.

7. $\angle A = \pi - 4\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $\angle B = \angle C = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

8. $AC = \sqrt{45}$, $BD = \sqrt{37}$.

9. $\sqrt{3}/2$.

10. 4/5.

11. $n/m$.

12. arctg3.

13. 1 : 1; 9 : 5.

14. $4\sqrt{10}-2\sqrt{15}$.

15. $R_{\Delta BB_1C}=4\sqrt{2}$, $R_{\Delta AB_1C_1}=2$.

16. 14/5.

17. $2S$.

## § 5. ЛЕММЫ О ПЛОЩАДЯХ

1. 2,4.

2. 27/8.

3. 5/24.

4. 1/6.

5. 48/5.

6. 24.

7. 9.

8. 3.

9. $\dfrac{Sb(3a+b)}{2(a+b)(2a+b)}$.

10. $\angle B=90°$, $\angle C=45°$.

11. 23/90.

12. 3.

13. $\dfrac{189\sqrt{55}}{88}$.

14. $\sqrt{\dfrac{3a^2+8c^2}{35}}$.

15. 189/25.

16. $\dfrac{ab}{(a+b)^2}$.

17. Искомое отношение может быть любым числом, большим 6, но меньшим 15.

18. 16/9.

19. 5/4.

20. 13 или $2\sqrt{67}$.

21. 2 или 3/5.

22. 3/16.

23. 1 или 4/3.

24. 9/2.

25. 19/44.

26. 21/10.

## § 6. УГЛЫ В ОКРУЖНОСТЯХ

1. $\sqrt{2}$.

2. $\sqrt{pq}$.

3. 60°, 75°, 45°.

4. 10.

5. $\sqrt{ab}$.

6. $\sqrt{a(a-b)}$.

7. $\sqrt{pq}$.

8. $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$.

9. 18.

10. 1/2, 3/4.

11. $\frac{2}{\sqrt{7}}$.

12. $\arccos\frac{3}{4}$.

13. $R^2\cos\alpha(1+\sin\alpha)$.

14. $\frac{ba^2}{c^2}$.

**15.** $2\sqrt{3}$.

**16.** 5.

**17.** 8.

**18.** 16/5.

**19.** $2R\sin\frac{\alpha}{2}$.

**20.** $\frac{qs-t^2}{t}$.

**21.** 6.

**22.** $\angle ACB = 60°$, $S = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

**23.** $\frac{bc}{a}$.

**24.** 18.

**25.** $\sqrt{6}+1$, $2\sqrt{10}$.

**26.** 4/9.

**27.** $\frac{1+\sqrt{33}}{2}$.

**28.** 9 : 8.

## § 7. КАСАНИЕ ОКРУЖНОСТЕЙ, КАСАНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

**1.** $\frac{R\sqrt{3}}{4}$.

**2.** 8.

**3.** $2\sqrt{21}-9$.

**4.** $\sqrt{r^2+(p-a)^2}$.

**5.** $\frac{2b+l}{c}$.

**6.** $4\sqrt{19}$.

7. $\sqrt{c^2 - ab}$.

8. 7 или 53/11.

9. 8/9 или 32/9.

10. $10\sqrt{5}$.

11. $\dfrac{1}{1+\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

12. 65/144.

13. $\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$.

## § 8. ДЛИНЫ И ПЛОЩАДИ, СВЯЗАННЫЕ С ОКРУЖНОСТЬЮ

1. $\dfrac{a^2(7-4\sqrt{3})(5\pi-6\sqrt{3})}{24}$.

2. $\dfrac{5\pi-6\sqrt{3}}{18}$.

3. $\dfrac{2\pi+3\sqrt{3}}{3}$.

4. $\dfrac{2\pi}{3}+4\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

5. $\dfrac{3\pi(3+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})}{7\pi-6(\sqrt{3}+1)}$.

6. $\pi-2$.

7. $\dfrac{5\sqrt{3}-2\pi}{6}$.

8. $\dfrac{3\pi}{2}+1$.

## § 9. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

**1.** 6.

**2.** 1.

**3.** 5 и 8.

**4.** 25.

**5.** 36 или $\sqrt{19}$.

**6.** $\sqrt{21}$.

**7.** 9,6.

**8.** $\dfrac{42\sqrt{51}}{625}a^2$.

**9.** 10°, 130°, 130°, 90°.

**10.** 9/2.

**11.** 672.

**12.** $\dfrac{h}{\sqrt{2}}$.

**13.** $2\sqrt{13}$.

**14.** $\pi/4$, $\pi/4$, $3\pi/4$ и $3\pi/4$.

**15.** $4\sqrt{5}$.

**16.** $9\sqrt{2}$.

**17.** 3/2.

**18.** $S_{ABCD} = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} < 2\sqrt{15}$.

**19.** 150.

**20.** 9/2.

**21.** $RS = SP = 4\sqrt{13}$.

**22.** Тангенсы углов равны $2\sqrt{6}$, $2\sqrt{6}$, $-2\sqrt{6}$, $-2\sqrt{6}$; $R = \dfrac{35\sqrt{6}}{6}$.