ОГЭ. Задание 25

Выполнил: учитель гимназии «Лаборатория Салахова»

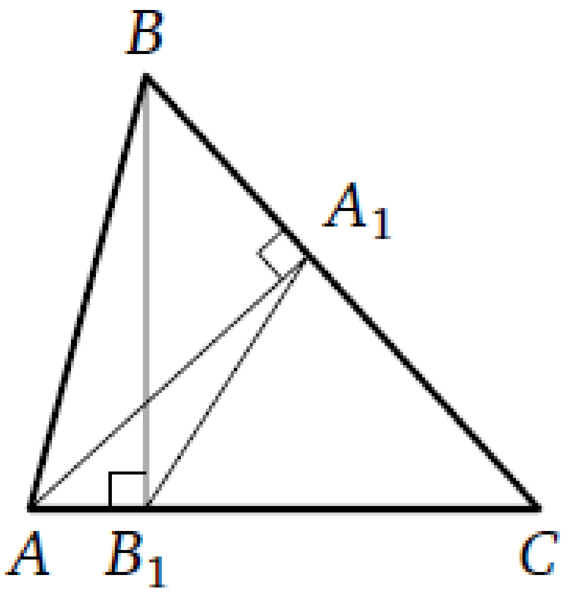
Иванов Александр Владимирович

Пример 1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.

Решение. Диагонали четырёхугольника AB_1A_1B пересекаются, значит, он является выпуклым. Поскольку

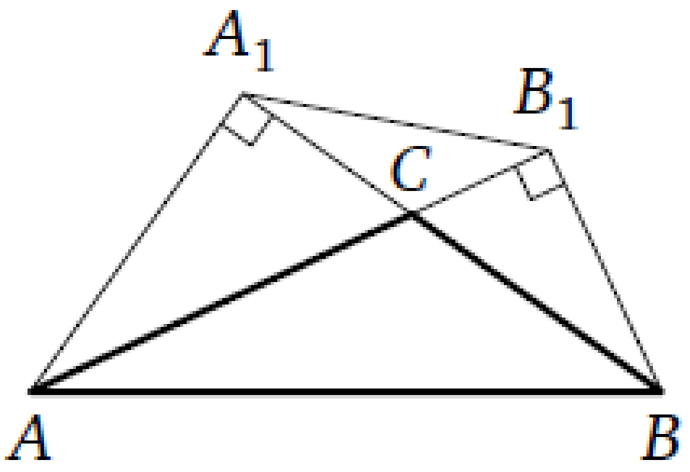
$$\angle AB_1B = \angle AA_1B = 90^\circ,$$

около четырёхугольника AB_1A_1B можно описать окружность. Следовательно, углы AA_1B_1 и ABB_1 равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу AB_1.



Если два равных угла опираются на один и тот же отрезок, то через вершины этих углов и концы отрезка можно провести окружность.

Пример 2. В треугольнике ABC с тупым углом ACB проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

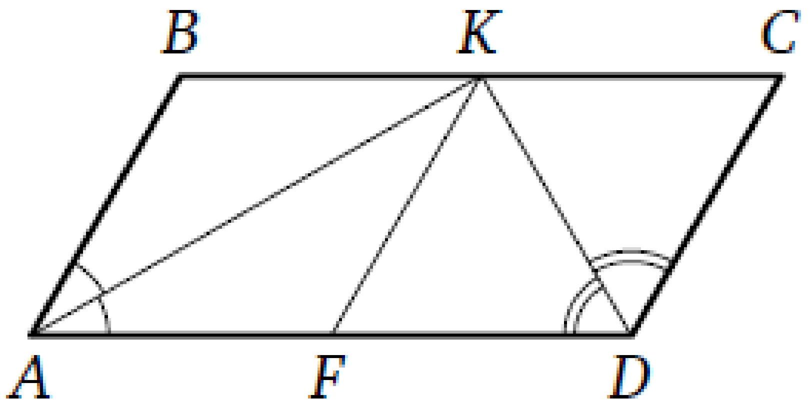


Решение. Поскольку угол ACB тупой, основания A_1 и B_1 высот лежат на продолжениях сторон BC и AC соответственно. Диагонали четырёхугольника AA_1B_1B пересекаются, поэтому он выпуклый.

Поскольку $\angle AA_1B = \angle AB_1B = 90^\circ$, около четырёхугольника AA_1B_1B можно описать окружность. Значит, углы AB_1A_1 и ABA_1 равны как вписанные углы, опирающиеся на дугу A_1A. Аналогично $\angle BA_1B_1 = \angle BAB_1$. Следовательно, треугольники A_1CB_1 и ACB подобны по двум углам.

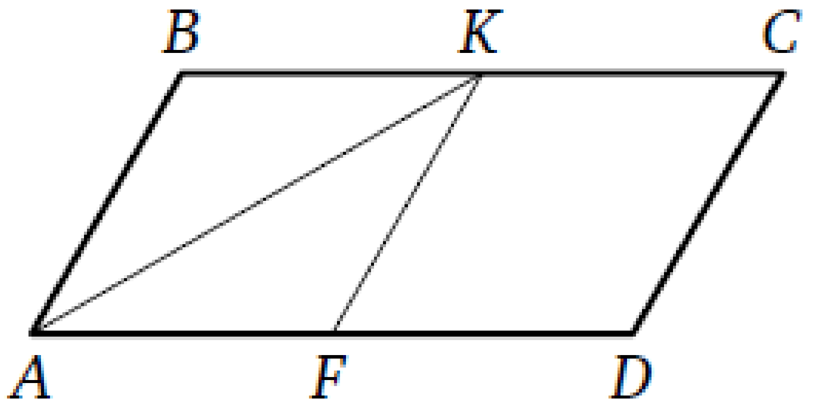
Пример 3. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K, лежащей на стороне BC. Докажите, что K — середина BC.

Решение. Проведём прямую KF параллельно стороне AB (см. рисунок). Тогда в каждом из параллелограммов $ABKF$ и $CDFK$ диагональ делит угол пополам, поэтому эти параллелограммы являются ромбами. Значит, $BK = KF = KC$. Следовательно, точка K — середина BC.



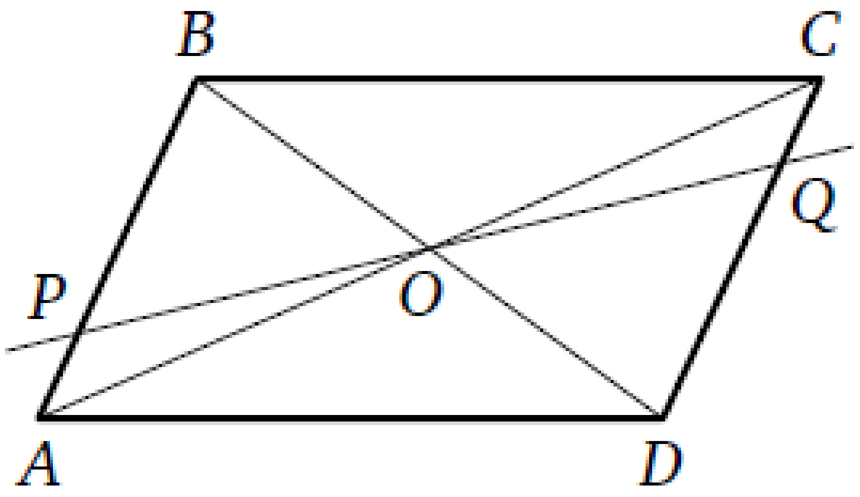
Биссектриса внутреннего угла параллелограмма образует равнобедренный треугольник в параллелограмме

Пример 4. Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Точка K — середина стороны BC. Докажите, что AK — биссектриса угла BAD.



Решение. Проведём прямую KF параллельно стороне AB (см. рисунок). Поскольку $BK = KC = AB$, параллелограмм $ABKF$ является ромбом, поэтому диагональ AK ромба $ABKF$ делит угол BAF пополам. Значит, AK — биссектриса угла BAD.

Пример 5. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках P и Q соответственно. Докажите, что отрезки BP и DQ равны.

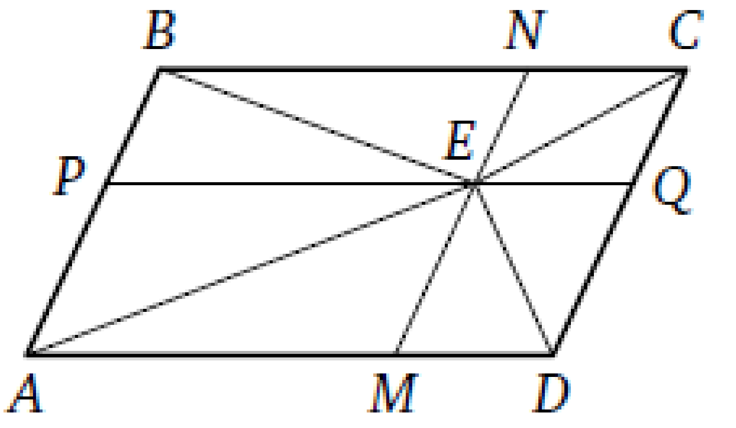


Решение. В треугольниках BPO и DQO стороны BO и DO равны по свойству диагоналей параллелограмма, $\angle PBO = \angle QDO$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и CD и секущей BD, а $\angle POB = \angle QOD$ как вертикальные углы.

Значит, треугольники BPO и DQO равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, отрезки BP и DQ равны.

Пример 6. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади параллелограмма.

Решение. Проведём через точку E прямые MN и PQ, параллельные сторонам параллелограмма (см. рисунок). Эти прямые разбивают исходный параллелограмм на четыре меньших, а отрезки EA, EB, EC, ED являются диагоналями этих параллелограммов и разбивают каждый из них на равные треугольники.

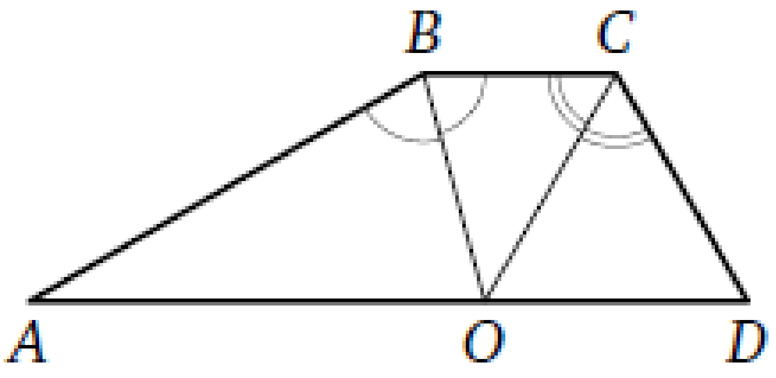


Пусть площади треугольников BEN, CEN, AEM и DEM равны S_1, S_2, S_3, S_4 соответственно. Тогда площадь параллелограмма $ABCD$ равна $2\left(S_1+S_2+S_3+S_4\right)$, а сумма площадей треугольников BEC и AED равна $S_1+S_2+S_3+S_4$, что вдвое меньше площади параллелограмма $ABCD$.

Пример 7. Биссектрисы углов B и C трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O, лежащей на стороне AD. Докажите, что точка O равноудалена от прямых AB, BC и CD.

Решение. Точка O лежит на биссектрисе угла ABC, поэтому эта точка равноудалена от прямых AB и BC. Аналогично точка O равноудалена от прямых BC и CD.

Значит, точка O равноудалена от прямых AB, BC и CD.



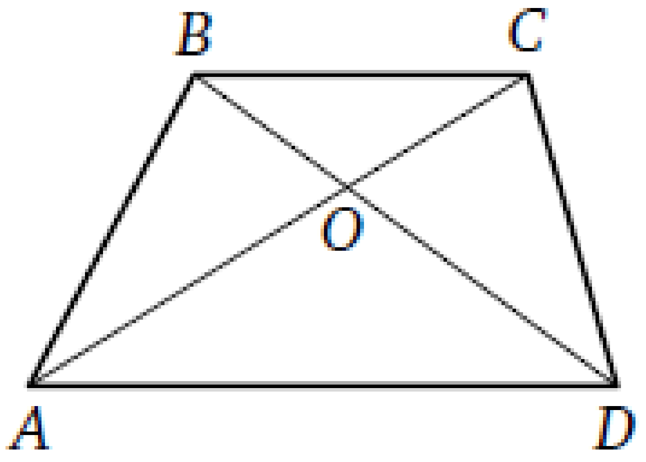
Биссектриса угла это множество точек, равноудалённых от сторон этого угла.

Пример 8. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Решение. Расстояния от точек B и C до прямой AD равны, следовательно, площади треугольников ABD и ACD равны. Тогда

$$S_{AOB} = S_{ABD} - S_{AOD} = S_{ACD} - S_{AOD} = S_{COD}.$$

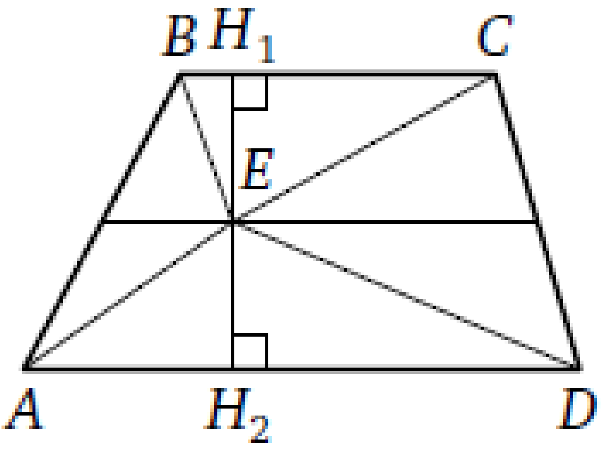
Значит, площади треугольников AOB и COD равны.



Площади треугольников с общим основанием (общей высотой) относятся как высоты (основания) данных треугольников.

Пример 9. На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади трапеции.

Решение. Проведём через точку E высоту H_1H_2 трапеции. По теореме Фалеса средняя линия разделит высоту пополам.



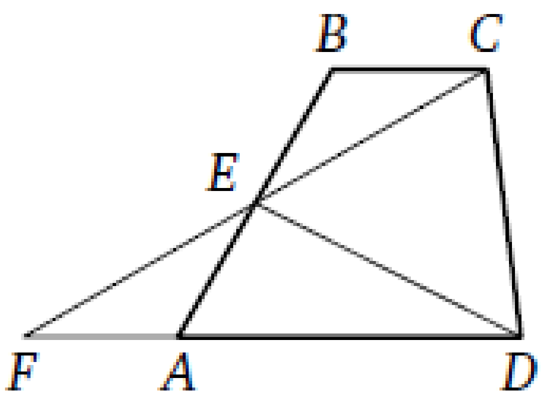
Пусть $EH_1 = EH_2 = h$. Тогда сумма площадей треугольников BEC и AED равна.

$$h \cdot \frac{BC}{2} + h \cdot \frac{AD}{2} = h \cdot \frac{BC + AD}{2}.$$

При этом площадь трапеции равна $2h \cdot \dfrac{BC + AD}{2}$, что как раз вдвое больше найденной суммы площадей треугольников.

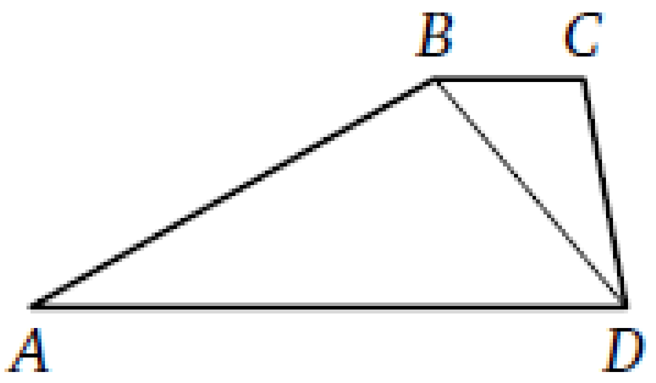
Пример 10. Точка E — середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника ECD равна половине площади трапеции

Решение. Пусть F — точка перечения прямых CE и AD. В треугольниках EFA и ECB стороны EA и EB равны по условию, углы при вершине E равны как вертикальные, а углы EBC и EAF равны как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AB. Значит, треугольники EFA и ECB равны. Следовательно, их площади равны, поэтому площадь трапеции $ABCD$ равна площади треугольника FCD.



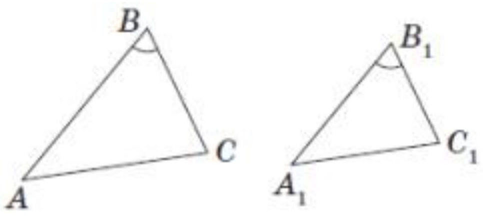
Из равенства треугольников EFA и ECB вытекает, что $FE = EC$, поэтому DE — медиана в треугольнике FCD. Тогда площадь треугольника DEC равна половине площади треугольника FCD, а значит, и половине площади трапеции $ABCD$.

Пример 11. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 5 и 20, $BD = 10$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.



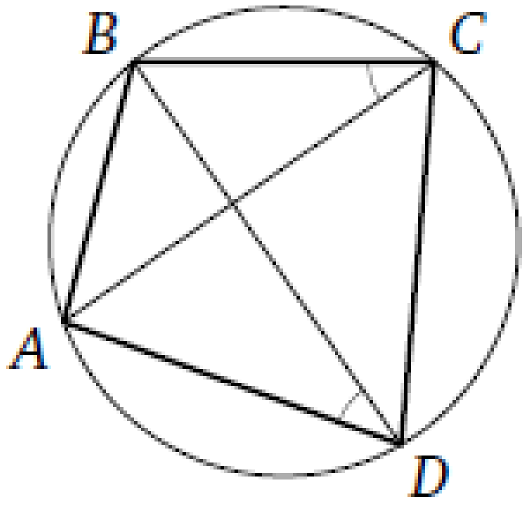
Решение. В треугольниках ADB и DBC углы ADB и DBC равны как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD, и, кроме того, $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{DB}{BC} = 2$.

Поэтому указанные треугольники подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

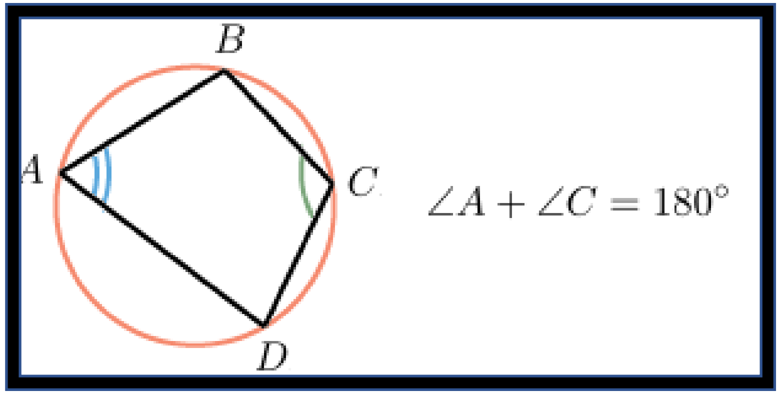


Если $\angle B = \angle B_1$ и $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC}$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

Пример 12. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы BCA и BDA равны. Докажите, что углы ABD и ACD также равны.

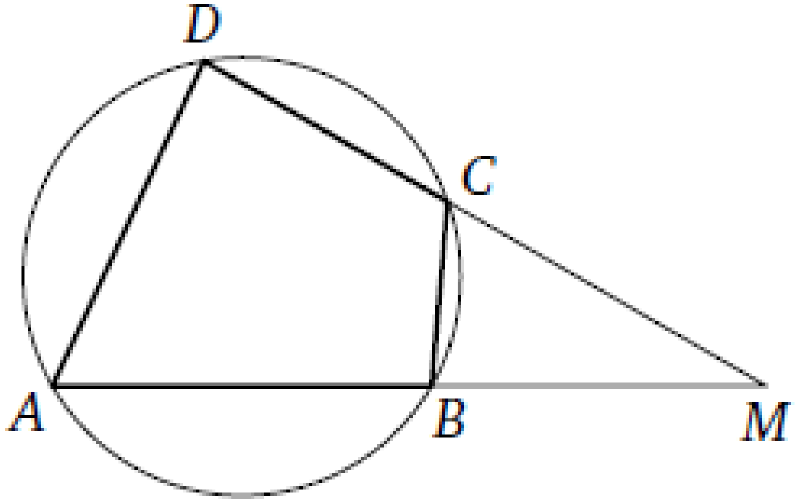


Решение. Поскольку четырёхугольник $ABCD$ выпуклый и $\angle BCA = \angle BDA$, около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность. Значит, $\angle ABD = \angle ACD$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу AD.



Пример 13. Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AB и CD четырёхугольника пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

Решение. Можно считать, что точка C лежит между точками D и M (см. рисунок).



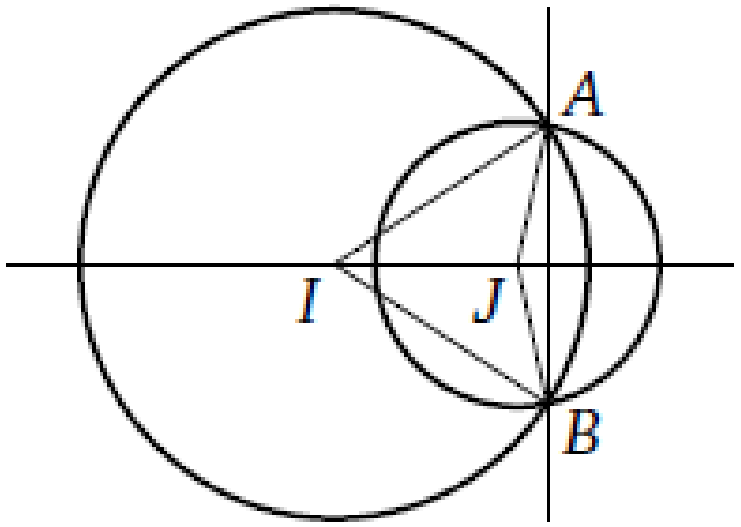
У треугольников MBC и MDA угол M общий. Кроме того,

$$\angle MBC = 180^\circ - \angle ABC$$

по свойству смежных углов, а $\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC$ по свойству вписанного четырёхугольника, поэтому $\angle ADM = \angle CBM$. Значит, треугольники MBC и MDA подобны по двум углам.

Пример 14. Окружности с центрами в точках I и J пересекаются в точках A и B, причём точки I и J лежат по одну сторону от прямой AB. Докажите, что прямые AB и IJ перпендикулярны.

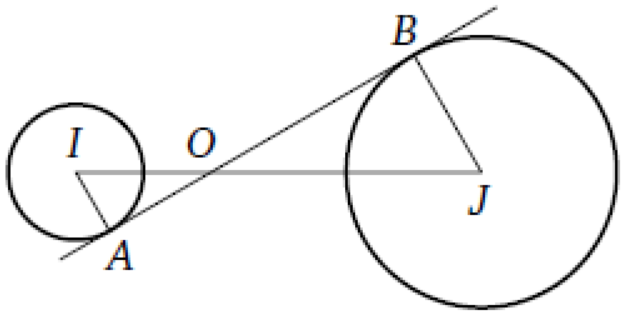
Решение. Точка I равноудалена от точек A и B, поэтому эта точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Аналогично точка J лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Значит, прямая, содержащая точки I и J, является серединным перпендикуляром к отрезку AB.



Следовательно, прямые IJ и AB перпендикулярны.

Пример 15. Окружности с центрами в точках I и J не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $m : n$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $m : n$.

Решение. Пусть A и B — точки касания окружностей с общей касательной, O — точка пересечения прямых IJ и AB (см. рисунок). Тогда $\angle IAO = 90°$ и $\angle JBO = 90°$ как углы между касательной и радиусами, проведёнными в точки касания, $\angle AOI = \angle BOJ$ как вертикальные углы, поэтому прямоугольные треугольники AOI и BOJ подобны.



Следовательно, $\frac{IA}{JB} = \frac{IO}{JO} = \frac{m}{n}$, значит, радиусы окружностей с центрами в точках I и J относятся как $m : n$. Таким образом, и диаметры этих окружностей относятся как $m : n$.

Зачётные задачи

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Докажите, что углы C_1A_1B и CAB равны.

2. Биссектрисы углов C и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке L, лежащей на стороне AB. Докажите, что L — середина AB.

3. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку F. Докажите, что сумма площадей треугольников ABF и CDF равна половине площади параллелограмма.

4. Биссектрисы углов A и D трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке M, лежащей на стороне BC. Докажите, что точка M равноудалена от прямых AB, AD и CD.

5. На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку F. Докажите, что сумма площадей треугольников BFC и AFD равна сумме площадей треугольников ABF и CFD.

6. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 4,5 и 18, $BD = 9$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

7. Около четырёхугольника $ABCD$ описана окружность. Диагонали четырёхугольника пересекаются в точке E. Докажите, что треугольники BEC и AED подобны.