Финансовая математика. Банки, вклады, кредиты (задание 17 ЕГЭ)

Курбанов Магомед Ахмедович,
МБОУ гимназия № 2

г.Сургут
2019 г.

Теория:

1) Процент – это сотая часть числа.

2) При начислении **m** процентов на некоторое число, это число увеличивается в (**1+0,01·m**) раз.

Например:

1) Увеличим число 70 на 25%.

70+0,25·70=70·(1+0,25)=70·1,25;

70·1,25

2) Увеличим число S на m%;

S+S·(0,01·m)=S·(1+0,01m).

S·(1+0,01m).

Задачи:

1) 31 декабря 2017 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5%. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг на 14,5%), затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (т.е. за два года)?

2) 31 декабря 2017 года Владимир взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг на r%), затем Владимир переводит очередной транш. Если бы он будет платить каждый год по 1 464 100 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 2 674 100 рублей, то за 2 года. Под какой процент Владимир взял деньги в банке?

3) Степан хочет взять в кредит 1,2 млн рублей. Погашение кредита происходить раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка – 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Степан взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 290 тыс. рублей?

Теория:

Пусть S – сумма кредита, X – разовые выплаты, r - % ставка, n – срок кредитования.

(После начисления r процентов сумма увеличивается в $q=(1+0{,}01r)$ раз).

$S_1=S\cdot q - X$, сумма долга через год после начисления процентов и выплаты.

$$S_2=S_1\cdot q - X = (S\cdot q - X)\cdot q - X = S\cdot q^2 - X\cdot q - X = S\cdot q^2 - X\cdot(q+1) = S\cdot q^2 -$$

$$- \frac{X\cdot(q+1)\cdot(q-1)}{(q-1)} = - S\cdot q^2 - \frac{X\cdot(q^2-1)}{(q-1)}$$

сумма долга через два года после начисления процентов и выплаты.

$$S_3=S_2\cdot q - X = (S\cdot q^2 - X\cdot q - X)\cdot q - X = S\cdot q^3 - X\cdot q^2 - X\cdot q - X = S\cdot q^3 -$$

$$- X\cdot(q^2+q+1) = S\cdot q^3 - \frac{X\cdot(q^2+q+1)\cdot(q-1)}{(q-1)} = S\cdot q^3 - \frac{X\cdot(q^3-1)}{(q-1)}$$

сумма долга через три года после начисления процентов и выплаты.

…

$$S_n= S\cdot q^n - \frac{X\cdot(q^n-1)}{(q-1)}$$

сумма долга через n лет после начисления процентов и выплаты.

Решение задачи 1:

1) 31 декабря 2017 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5%. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг на 14,5%), затем Дмитрий переводит в банк Х рублей. Какой должна быть сумма Х, чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (т.е. за два года)?

Решение

Пусть **S** – сумма кредита, **X** – разовые выплаты, **r** - % ставка, **n** – срок кредитования.

Значит S=4 290 000 рублей, r =14,5%, n=2, $q=1+0{,}01\cdot 14{,}5=1{,}145=\frac{229}{200}$.

Так как долг погашен за два года, то $S_2=0$, т.е.

$$S_2=S\cdot q^2-\frac{X\cdot(q^2-1)}{(q-1)}=0,\qquad S\cdot q^2-X\cdot(q+1)=0,$$

$$4\,290\,000\cdot\left(\frac{229}{200}\right)^2-X\cdot\left(\frac{229}{200}+1\right)=0$$ Умножим на 200

$$4\,290\,000\cdot\frac{229}{200}\cdot 229-X\cdot(229+200)=0$$

Решение задачи 1:

$S_2 = S \cdot q^2 - \dfrac{X \cdot (q^2 - 1)}{(q - 1)} = 0,$ $\quad S \cdot q^2 - X \cdot (q + 1) = 0,$

$$4\,290\,000 \cdot \left(\frac{229}{200}\right)^2 - X \cdot \left(\frac{229}{200} + 1\right) = 0$$

Умножим на 200

$$4\,290\,000 \cdot \frac{229}{200} \cdot 229 - X \cdot (229 + 200) = 0$$

$$4\,290\,000 \cdot \frac{229}{200} \cdot 229 - X \cdot 429 = 0$$

Разделим на 429

$$10\,000 \cdot \frac{229}{200} \cdot 229 - X = 0$$

$$50 \cdot 229 \cdot 229 - X = 0$$

$$X = 50 \cdot 229 \cdot 229$$

$$X = 2\,622\,050$$

2 622 050 рублей – ежегодные выплаты.

Ответ: 2 622 050 рублей.

Решение задачи 2:

2) 31 декабря 2017 года Владимир взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т.е. увеличивает долг на r%), затем Владимир переводит очередной транш. Если бы он будет платить каждый год по 1 464 100 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 2 674 100 рублей, то за 2 года. Под какой процент Владимир взял деньги в банке?

Решение

Пусть S – сумма кредита, X_1 и X_2– разовые выплаты в первом и во втором случаях, r - % ставка, n_1 и n_2– сроки кредитования соответственно.

Значит X_1=2 674 100 рублей, X_2=1 464 100 рублей, $n_1=2$, $n_2=4$, $q=1 + 0{,}01\cdot r$.

Так как в первом случае долг погашен за два года, то $S_2=0$, а во втором случае долг погашен за 4 года, то $S_4=0$.

$$S_2 = S\cdot q^2 - \frac{X\cdot\left(q^2-1\right)}{q-1} = 0 \qquad S_4 = S\cdot q^4 - \frac{X\cdot\left(q^4-1\right)}{q-1} = 0$$

Выразим из обоих равенств переменную S.

Решение задачи 2:

$$S_2 = S \cdot q^2 - \frac{X_1 X \cdot (q^2 - 1)}{q - 1} = 0 \qquad S_4 = S \cdot q^4 - \frac{X_2 \cdot (q^4 - 1)}{q - 1} = 0$$

Выразим из обоих равенств переменную S.

$$S \cdot q^2 = \frac{X_1 \cdot (q^2 - 1)}{q - 1} \qquad S \cdot q^4 = \frac{X_2 \cdot (q^4 - 1)}{q - 1}$$

$$S = \frac{X_1 \cdot (q^2 - 1)}{(q - 1) \cdot q^2} \qquad S = \frac{X_2 \cdot (q^4 - 1)}{(q - 1) \cdot q^4}$$

Приравняем правые части полученных равенств.

$$\frac{X_1 \cdot (q^2 - 1)}{(q - 1) \cdot q^2} = \frac{X_2 \cdot (q^4 - 1)}{(q - 1) \cdot q^4}$$ **Умножим на** $(q - 1) \cdot q^2$

$$X_1 \cdot (q^2 - 1) = \frac{X_2 \cdot (q^2 - 1) \cdot (q^2 + 1)}{q^2}$$ **Разделим на** $(q^2 - 1)$

$$X_1 = \frac{X_2 \cdot (q^2 + 1)}{q^2}$$ **Умножим на** q^2

$$X_1 \cdot q^2 = X_2 \cdot (q^2 + 1)$$ **Выразим** q^2

Решение задачи 2:

$$\text{Х}_1 \cdot q^2 = \text{Х}_2 \cdot q^2 + \text{Х}_2$$

$$\text{Х}_1 \cdot q^2 - \text{Х}_2 \cdot q^2 = \text{Х}_2$$

$$q^2 \cdot (\text{Х}_1 - \text{Х}_2) = \text{Х}_2$$

$$q^2 = \frac{\text{Х}_2}{\text{Х}_1 - \text{Х}_2}$$

Подставим исходные данные

$$q^2 = \frac{1\,464\,100}{2\,674\,100 - 1\,464\,100} = \frac{1\,464\,100}{2\,674\,100 - 1\,464\,100} = \frac{1\,464\,100}{1\,210\,000} =$$

$$= \frac{14\,641}{12\,100} = \frac{121}{100} = 1,21.$$

Значит $q = \pm 1,1.$

$q = -1,1$ **не удовлетворяет условию задачи, следовательно**

$q = 1,1$

$1 + 0,01r = 1,1$

10% годовых – процентная ставка.

$0,01r = 0,1$

$r = 10$

Ответ: 10%.

Решение задачи 3:

3) Степан хочет взять в кредит 1,2 млн рублей. Погашение кредита происходить раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка – 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Степан взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 290 тыс. рублей?

Решение

Пусть S – сумма кредита, X– ежегодные выплаты, r - % ставка, n– срок кредитования.

Чтобы количество лет кредитования было минимальным, нужно чтобы ежегодные выплаты были максимальными, т.е. 290 000 руб.

Значит S=1 200 000 рублей, X=290 000 рублей, r=10%, q=1 + 0,01·10=1,1.

$$S_n = S \cdot q^n - \frac{X \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = 0$$

$$S \cdot q^n \cdot (q - 1) = X \cdot (q^n - 1)$$

$$S \cdot q^n \cdot (q - 1) - X \cdot q^n = -X$$

$$q^n \cdot \left(X - S \cdot (q - 1)\right) = X$$

$$q^n = \frac{X}{X - S \cdot (q - 1)}$$

$$1,1^n = \frac{290\,000}{290\,000 - 1\,200\,000 \cdot (1,1 - 1)}$$

$$1,1^n = \frac{29}{17} \approx 1,7058823529$$

Решение задачи 3:

$$1,1^n = \frac{29}{17} \approx 1,7058823529$$

$$1,1^2 = 1,21$$
$$1,1^3 = 1,331$$
$$1,1^4 = 1,4641$$
$$1,1^5 = 1,61051$$
$$1,1^6 = 1,771561$$

Так как $1,1^5 < \frac{29}{17} < 1,1^6,$

то Степан может взять кредит сроком на 6 лет.

Ответ: 6 лет.

Решение задачи 3:

3) Степан хочет взять в кредит 1,2 млн рублей. Погашение кредита происходить раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка – 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Степан взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 290 тыс. рублей?

Решение. Пусть S – сумма кредита, X– ежегодные выплаты, r - % ставка, n– срок кредитования.

Чтобы количество лет кредитования было минимальным, нужно чтобы ежегодные выплаты были максимальными, т.е. 290 000 руб.

$1\,200\,000 \cdot 1,1 - 290\,000 = \; 1\,320\,000 - 290\,000 = \; 1\,030\,000$ руб.

Сумма долга через год, после первой выплаты.

$1\,030\,000 \cdot 1,1 - 290\,000 = 1\,133\,000 - 290\,000 = \; 843\,000$ руб.

Сумма долга через два года, после второй выплаты.

$843\,000 \cdot 1,1 - 290\,000 = 927\,300 - 290\,000 = 637\,300$ руб.

$637\,300 \cdot 1,1 - 290\,000 = 701\,030 - 290\,000 = 411\,030$ руб.

$411\,030 \cdot 1,1 - 290\,000 = 452\,133 - 290\,000 = 162\,133$ руб.

$162\,133 \cdot 1,1 = 178\,346,3$ руб. Полученная сумма меньше чем ежегодные выплаты, то полученную сумму выплачиваем разово.

Получается, что Степан может взять кредит на 6 лет.

Ответ: 6 лет.

Задачи:

4) 15 января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 15% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

5) 15-го декабря планируется взят кредит в банке на 1200 тысяч рублей на (n+1) месяц. Условия его возврата таковы:
—1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;
—со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
—15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на 80 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
—15-го числа n-го месяца долг составит 400 тысяч рублей;
—к 15-му числу ($n+1$)-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1288 тысяч рублей.

Решение задачи 4:

4) 15 января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 15% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение

Чтобы долг уменьшался равномерно на одну и туже сумму необходимо ежемесячно выплачивать $\frac{1}{14}$ суммы кредита, а также выплачивать начисленные проценты за этот месяц.

Пусть S сумма кредита.

Чтобы узнать всю сумму выплат, определим проценты начисленные за каждый месяц.

$0{,}01r \cdot S$ - проценты начисленные за 1 месяц; $\frac{13}{14}S$ - сумма долга через 1 месяц;

$0{,}01r \cdot \frac{13}{14}S$ - проценты - за 2 месяц; $\frac{12}{14}S$ - сумма долга через 2 месяца;

Решение задачи 4:

$0{,}01r\cdot\frac{12}{14}S$ - проценты - за 3 месяц;

$\frac{11}{14}S$ - сумма долга через 3 месяца;

…

…

$0{,}01r\cdot\frac{2}{14}S$ - проценты - за 13 месяц;

$\frac{1}{14}S$ - сумма долга через 13 месяцев;

$0{,}01r\cdot\frac{1}{14}S$ - проценты - за 14 месяц;

$$0{,}01r\cdot S + 0{,}01r\cdot\frac{13}{14}S + 0{,}01r\cdot\frac{12}{14}S + \ldots + 0{,}01r\cdot\frac{2}{14}S + 0{,}01r\cdot\frac{1}{14}S=$$

$$= 0{,}01rS\left(1 + \frac{13}{14} + \frac{12}{14} + \ldots + \frac{2}{14} + \frac{1}{14}\right) = 0{,}01rS\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{14}\right)}{2}\cdot 14 = 0{,}01rS\cdot\frac{14+1}{2} =$$

$$=\frac{15\,rS}{100\cdot 2} = \frac{3\,rS}{40}$$

$\frac{3\,rS}{40} + S$ - сумма выплаченная за весь период;

Так как общая сумма выплат после полного погашения кредита на 15% больше суммы S, то

$\frac{3\,rS}{40} + S = 1{,}15\,S$ Разделим обе части на S

Решение задачи 4:

$$\frac{3\,rS}{40} + S = 1,15\,S$$

Разделим обе части на S

$$\frac{3\,r}{40} + 1 = 1,15$$

Умножим на 40

$$3r + 40 = 46$$

$$3r = 6$$

$$r = 2$$

2% - процентная ставка

Ответ: 2%.

Решение задачи 5:

5) 15-го декабря планируется взят кредит в банке на 1200 тысяч рублей на (n+1) месяц. Условия его возврата таковы:
—1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;
—со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
—15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на 80 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
—15-го числа n-го месяца долг составит 400 тысяч рублей;
—к 15-му числу (n+1)-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1288 тысяч рублей.

Решение

По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

1200; 1120; 1040; ... 480; 400; 0.

$a_k=a_1+d(k-1)$

$$1200 = 400 + 80 \cdot (k-1);$$
$$k = 11;$$
$$n + 1 = 11;$$
$$n = 10;$$

Решение задачи 5:

Первого числа каждого месяца долг возрастает на *r* %. Пусть $q = 1 + 0{,}01r$,

Тогда последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова: $1200q$; $1120q$; ... $480q$; $400q$.

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$1200\cdot0{,}01r+80$; $1120\cdot0{,}01r+80$; ... $480\cdot0{,}01r+80$; $400\cdot(1+0{,}01r)$.

Всего следует выплатить:

$(1200\cdot0{,}01r+80) + (1120\cdot0{,}01r+80) + \ldots + (480\cdot0{,}01r+80) + 400\cdot(1+0{,}01r)=$

$=1200\cdot0{,}01r + 1120\cdot0{,}01r + \ldots + 480\cdot0{,}01r + 400\cdot0{,}01r + 400 + 10\cdot80 + =$

$=0{,}01r \cdot (1200 + 1120 + \ldots + 480 + 400) + 1200 =$

$=0{,}01r \cdot (1200 + 1120 + \ldots + 480 + 400) + 1200 = 0{,}01r \cdot \frac{400+1200}{2}\cdot11 + 1200 =$

$=0{,}01r \cdot800\cdot11 + 1200 = 88r + 1200.$

Из условия задачи известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1288 тысяч рублей :

$88r + 1200 = 1288$

$88r = 88$

$r = 1$

Ответ: 1%.

Решение задачи 6:

6) В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере *S* млн рублей, где *S* — целое число. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн руб.)	S	0,7S	0,4S	0

Найдите наибольшее значение *S*, при котором разница между наибольшей и наименьшей выплатами будет меньше 1 млн рублей.

Решение

Долг перед банком (в млн рублей) на июль каждого года должен уменьшаться до нуля следующим образом:

S; 0,7S; 0,4S; 0.

По условию, в январе каждого года долг увеличивается на 25%, значит, долг в январе каждого года равен: 1,25S; 0,875S; 0,5S.

Следовательно, выплаты с февраля по июнь каждого года составляют:

1,25S – 0,7S = 0,55S; 0,875S – 0,4S = 0,475S; 0,5S – 0 = 0,5S.

Решение задачи 6:

По условию, разность между наибольшей и наименьшей выплатами должна быть меньше 1 млн рублей:

$0{,}55S - 0{,}475S < 1;$

$0{,}075S < 1;$

$S < 13\frac{1}{3};$

Наибольшее целое решение этого неравенства — число 13.

Значит, искомый размер кредита — 13 млн рублей.

Ответ: 13 млн рублей.

Решение задачи 7:

7) Банк под определенный процент годовых принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40%. К концу следующего года накопленная сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков процент новых годовых?

Решение

Пусть S сумма вклада, r- процентная ставка старых годовых.

$S\cdot(1+\frac{r}{100})$ сумма вклада через год после начисления процентов

$S\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)-\frac{1}{4}S\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)=\frac{3}{4}S\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)$ сумма вклада через год после снятия части вклада

$\frac{3}{4}S\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)(1+\frac{r+40}{100})$ сумма вклада через два года после начисления новых процентов

Т.к. через два года после начисления процентов накопленная сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад, то

$$\frac{3}{4}S\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1+\frac{r+40}{100}\right)=1,44S$$

$$\frac{3}{4}\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1+\frac{r+40}{100}\right)=1,44$$ Умножим на $\frac{4}{3}$

$$\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1+\frac{r+40}{100}\right)=1,92$$

Решение задачи 7:

$$\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1+\frac{r+40}{100}\right)=1,92$$

Умножим на 100

$$(100+r)\left(1+\frac{r+40}{100}\right)=192$$

Умножим на 100

$$(100+r)(100+r+40)=19200$$

$$(r+100)(r+140)=19200$$

$$r^2+240\text{r}-5200=0$$

r_1= - 260; r_2 = 20

r_1= - 260 не удовлетворяет условию задачи

r_2 = 20

20% старый процент годовых

20+40=60% новый процент годовых

Ответ: 60%.

Спасибо
за
внимание!