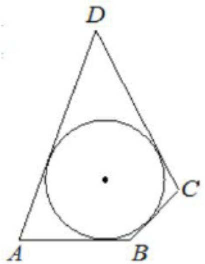
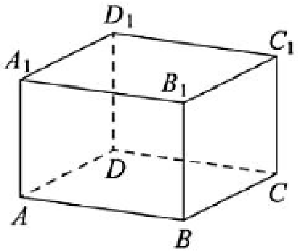
Контрольно измерительные материалы по математике (профиль)
Вариант 34 2024

1. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 10$, $CD = 17$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.



2. Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны $5\sqrt{3}$ и 4, а угол между ними равен 150^0. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $AB = 3$, ребро $AD = 2\sqrt{10}$, ребро $AA_1 = 2$. Точка K – середина ребра BB_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки A_1, D_1 и K.



4. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится 20 сумок, имеющих дефекты. Найдите вероятность того, что выбранная в магазине сумка окажется с дефектом. Результат округлите до сотых.

5. В ящике семь красных и девять синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету?

6. Найдите корень уравнения $\sqrt{24+5x} = x$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из них.

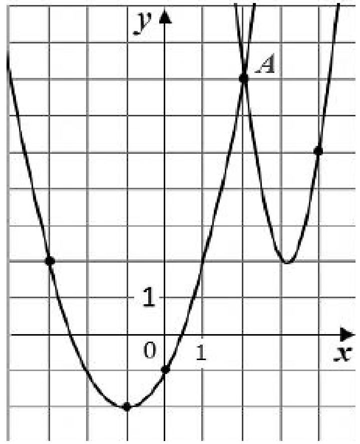
7. Найдите значение выражения $\sqrt{3}\sin(-1140°)$

8. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{5}t^3 - t^2 + 2t$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 5$ с.

9. Для определения эффективной температуры звезды используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвертой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5{,}7\cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{16}\cdot 10^{20}$ м^2, а излучаемая ею мощность P равна $9{,}12\cdot 10^{25}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

10. Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 45 км/ч, вторую треть — со скоростью 70 км/ч, а последнюю — со скоростью 90 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

11. На рисунке изображены графики функций $f(x) = 4x^2 - 25x + 41$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



12. Найдите точку минимума функции

$$y = \log_5(x^2 - 7x + 13) + 2$$

2 часть

13. а) Решите уравнение

$$(2\sin^2 x - 11\sin x + 5)\cdot\log_{15}(-\cos x) = 0$$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

14 Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, сторона основания $AB = 16$, высота $SH = 10$, точка K — середина AS. Плоскость, проходящая через точку K и параллельная основанию пирамиды, пересекает ребра SB и SC в точках Q и P соответственно.

а) Докажите, что площадь $PQBC$ относится к площади BSC как $3 : 4$.

б) Найдите объем пирамиды $KBQPC$.

15 Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 4x - 3}{x^2 - 4x + 3} + \frac{x^2 - 4x + 24}{x^2 - 4x} \geq 0$$

16 Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на x млн рублей, где x – целое число. Найдите наименьшее значение x, при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 9 млн рублей.

17 Точки A_1, B_1 и C_1— середины сторон соответственно BC, AC и AB остроугольного треугольника ABC.

а) Докажите, что отличная от A_1 точка пересечения окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1 и A_1BC_1, лежит на окружности, описанной около треугольника B_1AC_1.

б) Известно, что $AB = AC = 10$ и $BC = 12$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1, A_1BC_1, и B_1AC_1.

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{3^x - a} + \frac{a - 6}{\sqrt{3^x - a}} = 1$$

имеет ровно два различных корня.

19 а) Можно ли представить число $\frac{1}{6}$ в виде суммы двух дробей, числители которых — единицы, а знаменатели — различные натуральные числа?

б) Тот же вопрос для числа $\frac{2}{7}$.

в) Какое наименьшее количество слагаемых указанного вида (дробей с числителями 1 и знаменателями — попарно различными натуральными числами) потребуется, чтобы представить число $\frac{3}{7}$?