Подготовка к ОГЭ по математике

задание 22
«Графики с выколотыми точками»

Автор составитель:
учитель математики
МБОУ СОШ № 1 г. Сургут
Шелудько Ирина Анатольевна

ОГЭ по математике. Задание 22. Графики с выколотыми точками

План работы с заданием.
1. Указать область определения функции D(y)
2. Преобразовать (упростить) правую часть функции
3. Сделать вывод.
Построим график функции y=...., где x = ... (указываем выколотые точки)
4. Описываем функцию, задаем таблицу значенй
5. Строим график функции
6. Выкалываем точки
7. Выполняем пункт б)

Задача 1: **Постройте график функции** $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$ **и определите, при каких значениях параметра** c **прямая** $y = c$ **имеет с графиком ровно одну общую точку.**

Область определения функции D(y): $x \neq -2, \qquad x \neq 3.$

Обратим внимание на числитель: $x^4 - 13x^2 + 36$. Это биквадратное уравнение. Оно решается методом замены: $x^2 = t$. Но в случае с приведенным квадратным уравнением можно обойтись и без этого. Его корни можно найти с помощью теоремы Виета:

$$x_1 + x_2 = -b,$$
$$x_1 \cdot x_2 = c.$$

В нашем уравнении $b = -13, c = 36$. Надо подобрать такую пару чисел, сумма которых будет равна 13, а произведение равно 36. Очевидно, что это числа 4 и 9. Таким образом, корни числителя найдены:

$$x_1 = 4, \qquad x_2 = 9.$$

Квадратный трехчлен можно разложить на множители следующим образом

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Но мы имеем дело с биквадратным уравнением – значит, скорректируем:

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x^2 - x_1)(x^2 - x_2).$$

В нашем уравнении, являющемся числителем, $a = 1$. Значит, числитель мы можем записать в следующем виде:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 4)(x^2 - 9).$$

Полученное выражение тоже раскладывается – теперь уже по формуле сокращенного умножения. Начнем с первого множителя:

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2).$$

Теперь второй множитель:

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3).$$

Собираем вновь числитель и получаем уравнение функции в новом виде:

$$y = \frac{(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)}.$$

$$y = (x-2)(x+3).$$

$y = (x - 2)(x + 3).$

$y = x^2 + x - 6.$

$y_1 = -2^2 + (-2) - 6 = 4 - 2 - 6 = -4,$

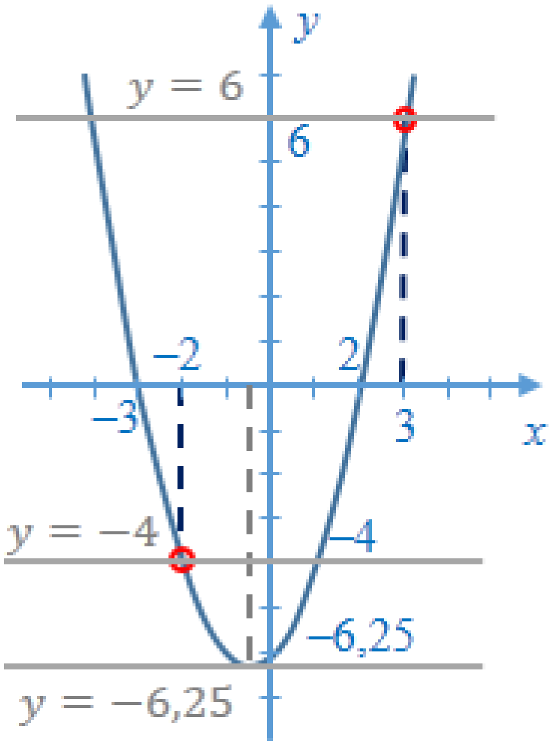
$y_2 = 3^2 + 3 - 6 = 9 + 3 - 6 = 6.$

Итак, в параболе надо выколоть точки $(-2; -4)$ и $(3; 6)$.

Вершина параболы

$x_0 = -\frac{1}{2},$

$y_0 = -6{,}25.$



Теперь решим вторую часть. Прямая $y = c$ имеет ровно одну общую точку при трех значениях c. Первая точка определяется сразу: $y = -6{,}25$. Но кроме того, выколоты точки $(-2; -4)$ и $(3; 6)$. То есть в этих точках функции не существует, парабола в них прерывается, и там пустота. Значит, в точках $y = -4$ и $y = 6$ прямая пересекает только одну ветвь параболы. Следовательно, мы решили и вторую часть задачи: при $c = -6{,}25$, $c = -4$ и $c = 6$ прямая $y = c$ имеет одну общую точку с графиком заданной функции.

<u>Ответ</u>: $c = -6{,}25$; $c = -4$; $c = 6$.

Задача 2 Постройте график функции:

$$y = \frac{3x+5}{3x^2+5x}.$$

Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Найдем область определения функции

Приравняем знаменатель к нулю и найдем эти значения:

$$3x^2 + 5x = 0,$$

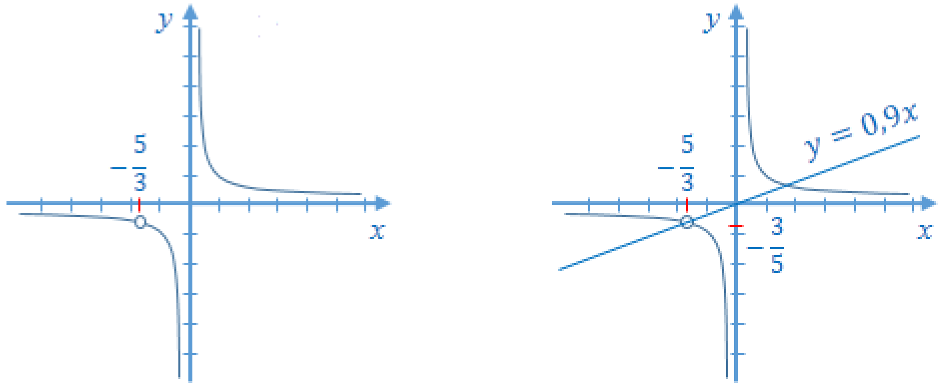
$$x(3x+5) = 0,$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x + 5 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x = -5 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Итак, в этих двух точках функция не существует. На графике их надо будет выколоть.

Теперь упрощаем функцию:

$$y = \frac{3x+5}{x(3x+5)} = \frac{1}{x}.$$



Переходим ко второй части задачи. Из графика видно, что прямая может иметь ровно одну общую точку с графиком только в том случае, если она пройдет через выколотую точку. Абсцисса этой точки нам известна – находим ординату:

$$y = \frac{1}{-\frac{5}{3}} = -\frac{3}{5} \text{ (рис. 16б).}$$

Подставляем значения x и y выколотой точки в уравнение прямой и получаем ответ:

$$-\frac{5}{3}k = -\frac{3}{5}$$

$$k = -\frac{3}{5} : \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{9}{10} = 0{,}9$$

При $k = 0{,}9$ прямая имеет ровно общую точку с графиком заданной функции.

<u>Ответ</u>: 0,9.

<u>Задача</u> 3 Постройте график функции $y = \frac{(x^2+2,25)(x-1)}{1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

<u>Решение</u>.
Замечаем: при $x = 1$ уравнение функции не имеет смысла (знаменатель равен нулю, а на ноль делить нельзя). Это значит, что в точке с абсциссой 1 функции не существует.
Упрощаем функцию:

$$y = \frac{(x^2+2,25)(x-1)}{-(x-1)},$$

$$y = -x^2 - 2,25.$$

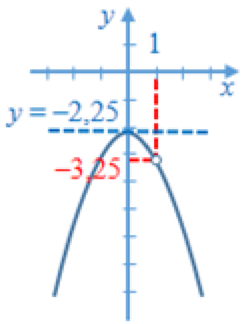
Читаем функцию:
- Это квадратичная функция, ее графиком является парабола.
- Первый коэффициент является отрицательным числом – значит, ветви параболы направлены вниз.
- Второй коэффициент равен нулю. То есть абсцисса вершины параболы равна 0.
- Свободный член равен –2,25. То есть ордината вершины равна –2,25.

Таким образом, не начав вычисления, мы уже знаем практически все основные параметры параболы. Надо еще определить ординату точки, в которой функция не существует. Как мы выяснили, абсцисса этой точки равна 1. Подставим 1 в уравнение функции и найдем ординату:

$$y = -1 \cdot 1^2 - 2,25 = -3,25.$$

Обращаем внимание на важный момент: $-x^2$ в уравнении функции означает, что первый коэффициент равен –1. Поэтому, подставляя конкретное число вместо x, надо умножить квадрат этого числа на –1 (что мы и сделали).

Итак, в точке (1; –3,25) функция не существует. Эту точку надо выколоть. Можно определить еще пару опорных точек, чтобы понять «толщину» параболы, но в данном случае в этом нет необходимости. Рисуем (см.рисунок).



Первая часть задачи выполнена: график нарисован.
Теперь разберемся с прямой.
В формулу прямой $y = kx$ подставим значения y и x:

$$-2{,}25 = 1k,$$

$$k = -2{,}25.$$

Заданная прямая параллельна оси x и имеет ровно одну общую точку с графиком функции при $k = -2{,}25$.
Задача решена.

Ответ: –2,25.

Задача 4 Постройте график функции:

$$y = \frac{(x+4)(x^2+3x+2)}{x+1}.$$

Определите, при каких значениях m прямая y = m имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Сначала разберемся со знаменателем. Отмечаем: $x \neq -1$, так как при $x = -1$ знаменатель равен нулю, а это недопустимо. Для нас важно, что в этой точке функция не существует.

Преобразуем числитель. Для этого приравняем квадратный трехчлен к нулю и найдем его корни:

$$x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Отмечаем коэффициенты: $a = 1,\ b = 3,\ \ c = 2.$

При $a = 1$ корни проще находить по теореме Виета:

$$x_1 + x_2 = -b, \qquad x_1 \cdot x_2 = c.$$

Подбираем такие два числа, сумма которых равна коэффициенту b с противоположным знаком, а произведение равно коэффициенту c. Это просто:

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = -2.$$

Применяем правило разложения трехчлена:

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2).$$

Подставляем это разложение в уравнение функции и производим сокращения:

$$y = \frac{(x+4)(x+1)(x+2)}{x+1} = (x+4)(x+2) = x^2 + 6x + 8.$$

Уравнение функции обрело более простой и понятный вид. Это квадратичная функция, графиком которой является парабола. Отметим коэффициенты:

$$a = 1,\ \ b = 6,\ \ c = 8.$$

Первый коэффициент положительный – значит, ветви параболы направлены вверх. Одна из ветвей пересекает ось y в точке $y = 8$.

Вычисляем корни функции (точки, в которых ветви параболы пересекают ось x). Для этого снова применяем теорему Виета и выясняем:

$$x_1 = -4, \qquad x_2 = -2.$$

Находим вершину параболы (ее абсциссу и ординату):

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2\cdot 1} = -3; \qquad y_0 = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{6^2 - 4\cdot 1\cdot 8}{4\cdot 1} = -1.$$

Находим, наконец, ординату точки, в которой функция не существует. Для этого в уравнение функции подставляем -1:

$$y_0 = -1^2 + 6(-1) + 8 = 1 - 6 + 8 = 3.$$

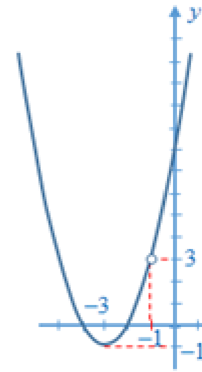


Рис. а

Строим график и выкалываем на нем точку, в которой функция не существует (рис. 'а):

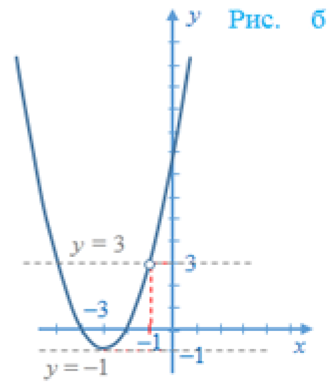


Рис. б

Построив график, мы решили первую часть задачи.
Из графика видно, что прямая $y = m$ имеет ровно общую точку с графиком в двух случаях: если прямая проходит через вершину параболы или через точку, где функции не существует (при $m = -1$ и $m = 3$).

Задача решена полностью.

Ответ: –1; 3.

<u>Задача 5</u>. Постройте график функции:

$$y = 1 - \frac{x^4 + x^3}{x + x^2}.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком две общие точки.

<u>Решение</u>.

Сразу заметим: при $x = -1$ дробь не имеет смысла (знаменатель равен нулю, а на ноль делить нельзя) – значит, в точке с этой абсциссой функция не существует. Ординату точки найдем позже.

Упростим и преобразуем функцию:

$$y = 1 - \frac{x^3(x+1)}{x(1+x)} = 1 - \frac{x^2}{x} = 1 - x^2.$$

Получилась квадратичная функция. Ее график – парабола. Первый коэффициент со знаком минус – значит, ветви параболы направлены вниз.

Приравняем функцию к нулю и найдем ее корни:

$$1 - x^2 = 0 \quad \leftrightarrow \quad (1-x)(1+x) = 0 \quad \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = 0 \\ 1 + x = 0 \end{cases} \begin{cases} -x = -1 \\ x = -1 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

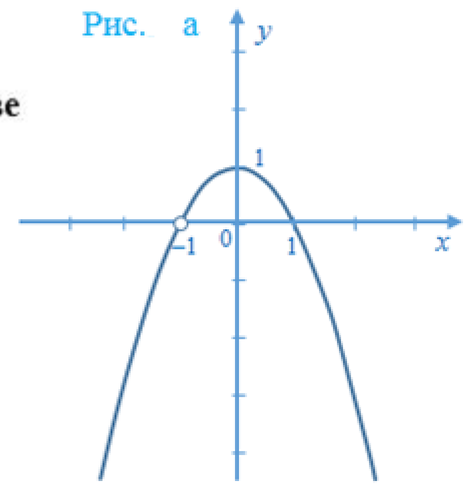
Отметим коэффициенты: $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$.

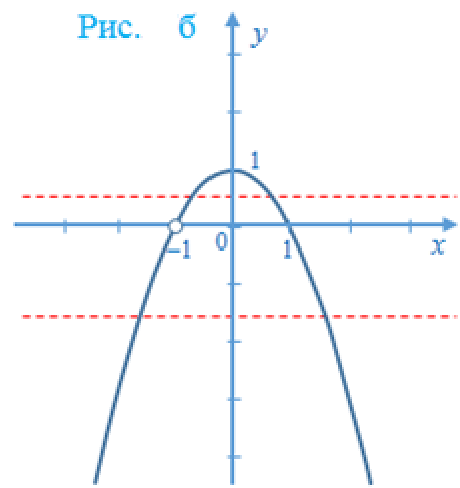
Найдем вершину параболы:

$$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{-2} = 0. \qquad y_в = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{0 - 4\cdot(-1)\cdot 1}{4\cdot(-1)} = -\frac{4}{-4} = 1.$$

Не забудем о точке, в которой й\функция не существует. Нам известна ее абсцисса. Найдем ординату:

$$y_{\emptyset} = 1 - (-1)^2 = 1 - 1 = 0.$$





Как видно из графика, прямая $y = m$ имеет с графиком две общие точки ниже $y = 1$ везде, кроме $y = 0$ (рис. б).

<u>Ответ</u>: $(-\infty; 0)\cup(0; 1)$.

Задача 6. Постройте график функции:

$$y = \frac{(x^2 - x - 6)(x^2 - 4x - 5)}{x^2 - 2x - 3}.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Обычно мы сразу отмечаем точки, в которых функция не существует, но нам предстоит разложить дробь, поэтому искомые точки мы, скорее всего, найдем попутно.

Упростим и преобразуем функцию. Для этого приравняем к нулю каждый множитель числителя, а также знаменатель, найдем корни получившихся квадратных уравнений и разложим их на множители.

Начнем с первого множителя:

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

По теореме Виета находим корни: $x_1 = -2, \ \ x_2 = 3.$

Разложим на множители: $\mathbf{(x + 2)(x - 3) = 0}$.

Теперь найдем корни второго множителя:

$$x^2 - 4x - 5 = 0.$$

Корни: $x_1 = -1, \ \ x_2 = 5.$

Раскладываем на множители: $\mathbf{(x + 1)(x - 5) = 0}$.

И переходим к знаменателю:

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Корни: $x_1 = -1, x_2 = 3.$

Одновременно отмечаем: при этих значениях x дробь теряет смысл (знаменатель превращается в ноль, а на ноль делить нельзя) – значит, это как раз абсциссы тех точек, в которых функция не существует. Ординаты найдем позже.

Раскладываем: $\mathbf{(x + 1)(x - 3) = 0}$.

Теперь собираем все вместе, приравниваем к нулю и упрощаем функцию:

$$y = \frac{(x+2)(x-3)(x+1)(x-5)}{(x+1)(x-3)} \quad \leftrightarrow \quad y = (x+2)(x-5) \quad \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \ \ \mathbf{y = x^2 - 3x - 10}.$$

Одновременно мы получили корни функции: $x_1 = -2$, $x_2 = 5$.
Понятно, что это квадратичная функция, ее график – парабола, ветви которой направлены вверх.
Отметим коэффициенты: $a = 1$, $b = -3$, $c = -10$.

Вычислим координаты вершины параболы:

$$x_{в} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \cdot 1} = 1{,}5. \qquad y_{в} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{49}{4} = -12{,}25.$$

Найдем ординаты точки, в которой функция не существует:

$$y_{\emptyset} = 3^2 - 3 \cdot 3 - 10 = 9 - 9 - 10 = -10.$$

$$y_{\emptyset} = -1^2 - 3 \cdot (-1) - 10 = 1 + 3 - 10 = -6.$$

И нарисуем график, не забыв выколоть точки, в которых функция не существует (рис. а):

Рис. а

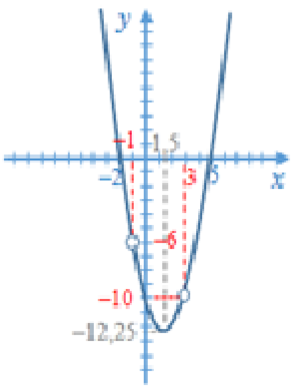
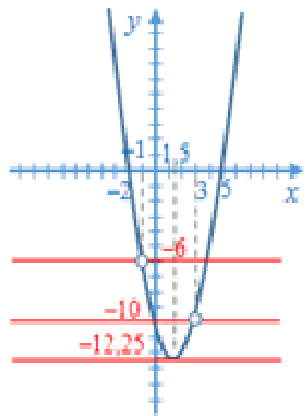


Рис б



Теперь смотрим: прямая $y = m$ имеет ровно одну общую точку с графиком при $m = -12{,}25$; $m = -10$; $m = -6$.

<u>Ответ</u>: –12,25; –10; –6.

Задача 7. Постройте график функции:

$$y = \frac{(x^2+1)(x-2)}{2-x}.$$

Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Сразу определим значение x, при котором знаменатель обращается в ноль, а значит, дробь не имеет смысла:

$$x \neq 2.$$

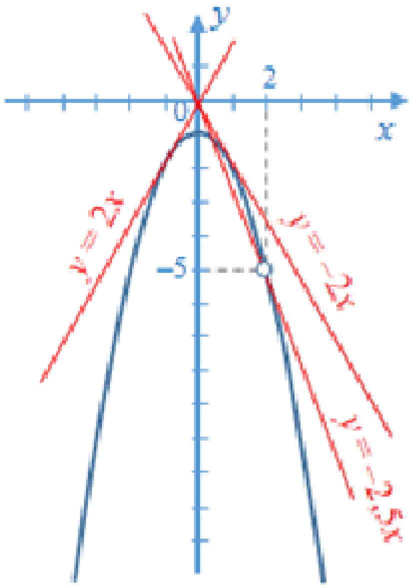
В точке с этой абсциссой функция не существует. Ординату найдем позже. А пока сократим формулу функции:

$$y = \frac{(x^2+1)(x-2)}{-(x-2)} = -(x^2+1) = -x^2 - 1.$$

Итак, это квадратичная функция, ее график – парабола, ветви которой направлены вниз. Коэффициент b равен нулю – значит, абсцисса вершины параболы тоже равна 0. Соответственно, ордината вершины равна –1. Значит, функция корней не имеет: ветви параболы ось x не пересекают.

Найдем ординату точки, в которой функция не существует. Для этого в формулу функции подставим абсциссу этой точки:

$$y_{\emptyset} = -(2^2) - 1 = -4 - 1 = -5.$$



Прямая может пройти через точку, где функция не существует, и пересечься с параболой только в одной точке. Найдем коэффициент k этой прямой – для этого подставим в формулу прямой абсциссу и ординату этой точки:

$$k \cdot 2 = -5 \quad \rightarrow \quad k = -5 : 2 \quad \rightarrow \quad k = -2{,}5.$$

Найдем другие значения k. Приравняем формулы функции и прямой:

$$-x^2 - 1 = kx.$$

Приравняем уравнение к нулю:

$$-x^2 - kx - 1 = 0.$$

Умножим квадратное уравнение на –1, чтобы упростить его:

$$x^2 + kx + 1 = 0$$

Отметим коэффициенты: $a = 1,\ b = k,\ c = 1.$

Найдем дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac = k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = k^2 - 4.$$

Квадратное уравнение имеет один корень лишь в том случае, если дискриминант равен нулю. Приравняем дискриминант к нулю и найдем другие значения k:

$$k^2 - 4 = 0 \rightarrow \quad k^2 = 4 \rightarrow \quad k = \pm\sqrt{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{l} k = -2 \\ k = 2. \end{array}\right.$$

Часть задачи выполнена: еще не построив график, мы узнали, что ровно одну общую точку с графиком функции прямая имеет при $k = -2{,}5$, $k = -2$ и $k = 2$.
Построим график функции и все найденные прямые (см.рисунок).

Ответ: –2,5; –2; 2.

<u>Задача</u> 8. Постройте график функции $y = \frac{2|x|-1}{2x^2-|x|}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не будет иметь с построенным графиком ни одной общей точки.

<u>Решение</u>.
Сразу запишем, в какой точке x функция не существует. Это число 0, так при $x = 0$ знаменатель равен 0, а на ноль делить нельзя. Итак:

$$x \neq 0.$$

У нас x под модулем. То есть это может быть как отрицательное, так и неотрицательное число. Неотрицательное – то есть равное нулю или положительному числу. Но мы сразу отметили, что $x \neq 0$. Значит, под модулем может быть как отрицательное число, так и положительное (но точно не ноль). Рассмотрим оба варианта и преобразуем нашу дробь.
При $x > 0$:

$$\frac{\mathbf{2|x|-1}}{\mathbf{2x^2-|x|}} = \frac{2x-1}{2x^2-x} = \frac{2x-1}{x(2x-1)} = \frac{1}{x}.$$

При $x < 0$ (перед x^2 ставить знак минус не имеет смысла, так как любое число в квадрате есть положительное число):

$$\frac{\mathbf{2|x|-1}}{\mathbf{2x^2-|x|}} = \frac{2(-x)-1}{2x^2-(-x)} = \frac{-2x-1}{2x^2+x} = \frac{-(2x+1)}{x(2x+1)} = -\frac{1}{x}.$$

Таким образом, наша функция обрела иной вид:

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{при } x > 0,$$

$$y = -\frac{1}{x} \quad \text{при } x < 0.$$

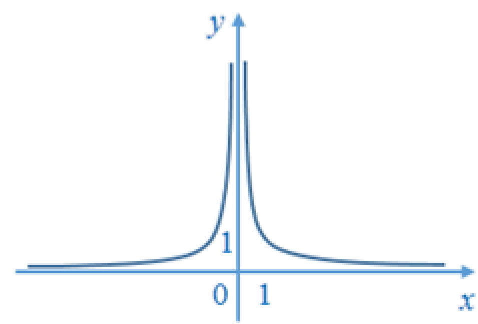
Здесь надо отметить очень важный момент. Становится ясно, что y тоже не может равен нулю: не существует такого значения x, при котором $y = 0$.
Отмечаем:

$$y \neq 0.$$

Теперь очевидно, что перед нами функция обратной пропорциональности, графиком которой является гипербола, не пересекающаяся ни с осью x, ни с осью y.

Чтобы нарисовать эскиз графика функции, выясним некоторые его точки:

	$y = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$				$y = -\frac{1}{x}$ $(x < 0)$			
x	1	2	3	4	–4	–3	–2	–1
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1



Из графика видно, что прямая $y = kx$ не будет иметь с графиком ни одной общей точки только в том случае, если она будет проходить под гиперболами. При любом ненулевом числе прямая обязательно пересечет их. Остается только одно число – ноль. То есть:
$k = 0$.

<u>Ответ</u>: $k = 0$.

<u>Задача 9</u> . Постройте график функции:

$$y = \frac{1}{2}\left(\left|x - \frac{1}{x}\right| + x + \frac{1}{x}\right).$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Область определения функции: $x \neq 0$

Раскроем подмодульное выражение. Для этого приравняем его к нулю и решим:

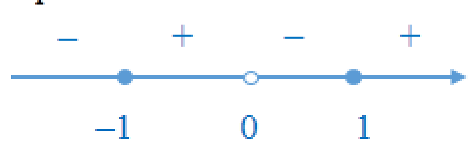
$$x - \frac{1}{x} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 1}{x} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{(x-1)(x+1)}{x} = 0.$$

Дробь равна нулю только в том случае, если числитель равен нулю.

Приравняем числитель к нулю и решим уравнение:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Отметим полученные точки на числовой оси и определим знаки интервалов. При этом не забудем о точке 0. Хотя в этой точке функция не существует, она тоже образует интервал знакопостоянства:



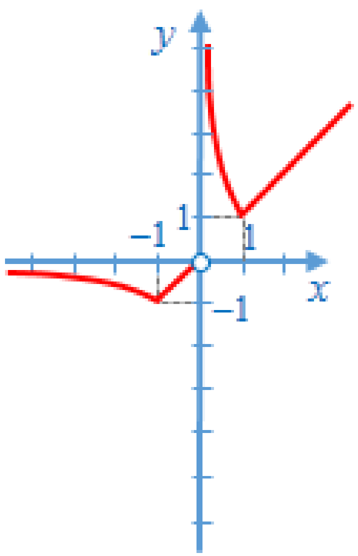
Таким образом, наша функция обрела новый вид:

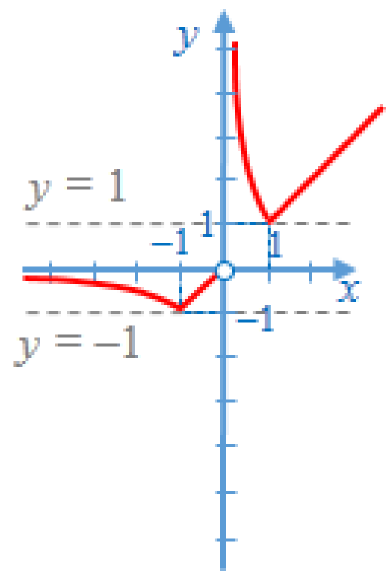
$$y = \begin{cases} x, \text{при } -1 \leq x < 0 \text{ и } x \geq 1 \\ \dfrac{1}{x}, \text{при } x < -1 \text{ и } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Найдем несколько точек по каждой подфункции, чтобы нарисовать график:

1: (–0,8; –0,8), (–0,2; –0,2), (2; 2), (3; 3).

2: (–4; –0,25), (–3; $-\frac{1}{3}$), (–2; –0,5), (–1; –1), (0,2; 5), (0,5; 2), (0,8; 1,25), (1; 1).





Как видим, прямая $y = m$ имеет ровно одну общую точку с графиком функции при $m = –1$ и $m = 1$.

Ответ: –1; 1.

Материалы по подготовке к ОГЭ по математике

https://time4math.ru/oge   Сайт для подготовки ОГЭ. Распечатай и реши

https://math100.ru/oge-2025/   Математика 100

https://math-oge.sdamgia.ru/ Сдам ГИА , математика ОГЭ

https://alexlarin.net/ прототипы заданий 20-25 ОГЭ

https://vpr-ege.ru/ тренировочные задания, разборы заданий ОГЭ