



Задание 20

«Алгебраические выражения, уравнения, неравенства и их СИСТЕМЫ»

**Автор: Павланис Светлана Михайловна,
учитель математики МБОУ СОШ № 44,
город Сургут, ХМАО - Югра**

Алгебраические выражения



1. Найдите значение выражения $28a - 7b + 13$, если $\frac{2a - 5b + 8}{5a - 2b + 8} = 6$.

Решение.

$$\frac{2a - 5b + 8}{5a - 2b + 8} = \frac{6}{1}$$

$$6(5a - 2b + 8) = 2a - 5b + 8$$

$$30a - 12b + 48 = 2a - 5b + 8$$

$$30a - 12b + 48 - 2a + 5b - 8 = 0$$

$$28a - 7b + 40 = 0$$

$$28a - 7b = -40$$

$$28a - 7b + 13 = -40 + 13 = -27$$

Ответ: - 27.



2. Упростите выражение: $\frac{12^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{12^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} &= \frac{(2^2 \cdot 3)^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} = \frac{2^{2n+8} \cdot 3^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} = \\ &= 2^{2n+8-(2n+5)} \cdot 3^{n+4-(n+2)} = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72 \end{aligned}$$

Ответ: 72.



3. Сократите дробь: $\frac{p(a)}{p(18-a)}$, если $p(x) = \frac{x(18-x)}{x-9}$.

Решение.

$$\begin{aligned} & \frac{p(a)}{p(18-a)} = p(a) : p(18-a) = \\ & = \frac{a(18-a)}{a-9} : \frac{(18-a)(18-(18-a))}{(18-a)-9} = \frac{a(18-a)}{a-9} : \frac{(18-a)a}{9-a} = \\ & = \frac{a(18-a)}{a-9} \cdot \frac{9-a}{(18-a)a} = -1 \end{aligned}$$

Ответ: - 1.



Уравнения



1. Решите уравнение: $x^3 + 5x^2 - 16x - 80 = 0$.

Решение.

$$x^3 + 5x^2 - 16x - 80 = 0$$

$$(x^3 + 5x^2) + (-16x - 80) = 0$$

$$x^2(x + 5) - 16(x + 5) = 0$$

$$(x + 5)(x^2 - 16) = 0$$

$$(x + 5)(x - 4)(x + 4) = 0$$

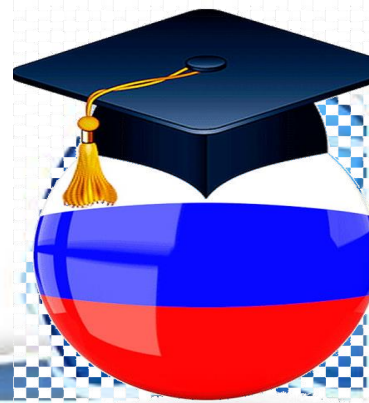
$$x + 5 = 0 \quad \text{или} \quad x - 4 = 0 \quad \text{или} \quad x + 4 = 0$$

$$x = -5$$

$$x = 4$$

$$x = -4$$

Ответ: - 5; - 4; 4.



2. Решите уравнение: $x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$.

Решение. $x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$

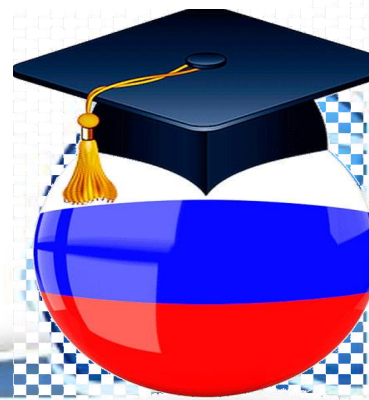
$$\text{ODЗ: } \begin{array}{l} 7-x \geq 0 \\ x \leq 7 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 - 2x + \sqrt{7-x} - \sqrt{7-x} - 48 = 0 \\ x^2 - 2x - 48 = 0 \end{array}$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 4 + 192 = 196$$

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2 - 14}{2} = \frac{-12}{2} = -6;$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2 + 14}{2} = \frac{16}{2} = 8 - \text{ не удовлетворяет ODЗ}$$

Ответ: - 6.



3. Решите уравнение: $x(x^2 + 10x + 25) = 14(x + 5)$.

Решение.

$$x(x^2 + 10x + 25) = 14(x + 5)$$

$$x(x + 5)^2 = 14(x + 5)$$

$$x(x + 5)^2 - 14(x + 5) = 0$$

$$(x + 5)(x(x + 5) - 14) = 0$$

$$(x + 5)(x^2 + 5x - 14) = 0$$

$$x + 5 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + 5x - 14 = 0$$

$$x = -5$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14) = 25 + 56 = 81$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 - 9}{2} = \frac{-14}{2} = -7;$$

$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 + 9}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Ответ: - 7; - 5; 2.



4. Решите уравнение: $\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{7}{x-3} - 18 = 0.$

Решение: пусть $x - 3 = t$, тогда уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{t^2} - \frac{7}{t} - 18 = 0$$

$$\frac{1}{t^2} - \frac{7}{t} - 18 = 0 \quad | \cdot t^2$$

ОДЗ: $t \neq 0$

$$1 - 7t - 18t^2 = 0$$

$$-18t^2 - 7t + 1 = 0$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot (-18) \cdot 1 = 49 + 72 = 121$$

$$t_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{121}}{2 \cdot (-18)} = \frac{7 - 11}{-36} = \frac{1}{9}; \quad t_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{121}}{2 \cdot (-18)} = \frac{7 + 11}{-36} = -\frac{1}{2}$$

вернемся к переменной x : $x - 3 = \frac{1}{9}$ или $x - 3 = -\frac{1}{2}$

$$x = \frac{1}{9} + 3$$

$$x = -\frac{1}{2} + 3$$

Ответ: $2\frac{1}{2}; 3\frac{1}{9}.$

$$x = 3\frac{1}{9}$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

5. Решите уравнение: $(x^2 - 16)^2 + (x^2 + 3x - 28)^2 = 0$.

Решение.

$(x^2 - 16)^2 \geq 0$ и $(x^2 + 3x - 28)^2 \geq 0$ при любом значении переменной.

Сумма двух неотрицательных слагаемых равна нулю, только если они

оба равны нулю. Получаем систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 - 16 = 0 \\ x^2 + 3x - 28 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 16 = 0$$

$$(x - 4)(x + 4) = 0$$

$$x - 4 = 0 \quad \text{или} \quad x + 4 = 0$$

$$x = 4$$

$$x = -4$$

$$\begin{cases} x = \pm 4, \\ x = -7, \\ x = 4 \end{cases}$$

$$x^2 + 3x - 28 = 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-28) = 9 + 112 = 121$$

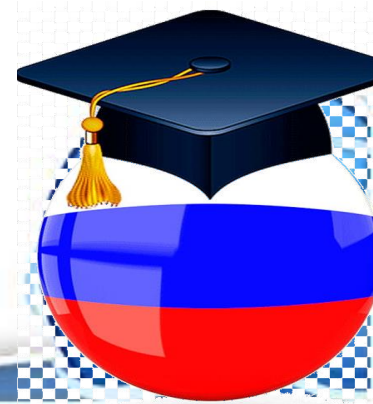
$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 - 11}{2} = -7;$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 + 11}{2} = 4$$

Ответ: 4.



Неравенства



1. Решите неравенство: $\frac{-21}{(x+6)^2 - 10} \geq 0$.

Решение:

т.к. $-21 < 0$ и $(x+6)^2 - 10 \neq 0$, то равносильным к данному будет неравенство $(x+6)^2 - 10 < 0$ Рассмотрим функцию $f(x) = (x+6)^2 - 10$.

Нули функции: $(x+6)^2 - 10 = 0$

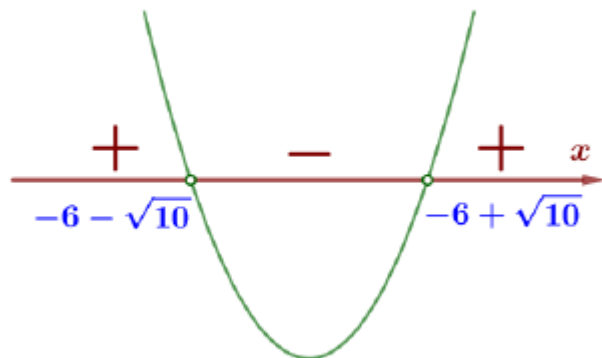
$$(x+6 - \sqrt{10})(x+6 + \sqrt{10}) = 0$$

$$x+6 - \sqrt{10} = 0 \quad \text{или} \quad x+6 + \sqrt{10} = 0$$

$$x_1 = -6 + \sqrt{10} \quad x_2 = -6 - \sqrt{10}$$

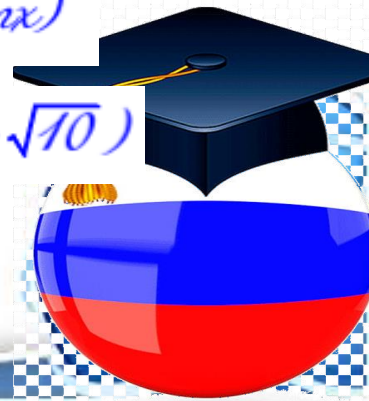
Изобразим схематически график функции $f(x) = (x+6)^2 - 10$

(парабола, $a > 0$ - ветви вверх)



$f(x) < 0$ при $x \in (-6 - \sqrt{10}; -6 + \sqrt{10})$

Ответ: $(-6 - \sqrt{10}; -6 + \sqrt{10})$.



2. Решите неравенство: $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$.

Решение. $(x-7)^2 - \sqrt{11}(x-7) < 0$

$$(x-7)(x-7-\sqrt{11}) < 0$$

Рассмотрим функцию $f(x) = (x-7)(x-7-\sqrt{11})$.

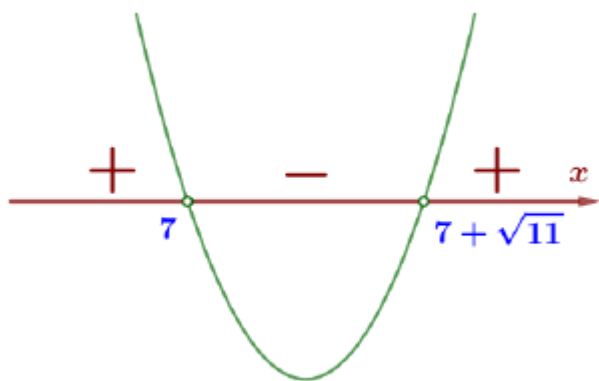
Нули функции: $(x-7)(x-7-\sqrt{11}) = 0$

$$x-7=0 \quad \text{или} \quad x-7-\sqrt{11}=0$$

$$x_1=7 \quad \quad \quad x_2=7+\sqrt{11}$$

Изобразим схематически график функции $f(x) = (x-7)(x-7-\sqrt{11})$

(парабола, $a > 0$ - ветви вверх)



$$f(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in (7; 7 + \sqrt{11})$$

$$\text{Ответ: } (7; 7 + \sqrt{11}).$$



3. Решите неравенство: $(x-6)^2 \geq (6x-1)^2$.

Решение.

$$(x-6)^2 - (6x-1)^2 \geq 0$$

$$(x^2 - 12x + 36) - (36x^2 - 12x + 1) \geq 0$$

$$x^2 - 12x + 36 - 36x^2 + 12x - 1 \geq 0$$

$$-35x^2 + 35 \geq 0 \quad | :(-35)$$

$$x^2 - 1 \leq 0 \quad \text{Рассмотрим функцию } f(x) = x^2 - 1.$$

Нули функции: $x^2 - 1 = 0$

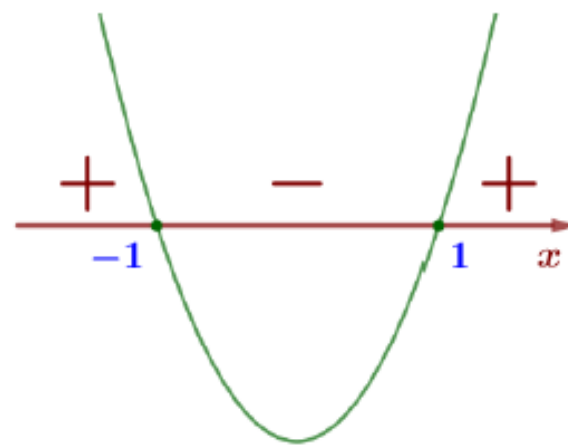
$$(x-1)(x+1) = 0$$

$$x-1 = 0 \quad \text{или} \quad x+1 = 0$$

$$x = 1 \quad \quad \quad x = -1$$

Изобразим схематически график функции $f(x) = x^2 - 1$

(парабола, $a > 0$ - ветви вверх):



Ответ: $[-1; 1]$.

$f(x) \leq 0$ при $x \in [-1; 1]$

Системы уравнений



1. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 3x^2 - 8x = y, \\ 9x - 24 = y. \end{cases}$$

Решение. $3x^2 - 8x = 9x - 24$

$$3x^2 - 8x - 9x + 24 = 0$$

$$x(3x - 8) - 3(3x - 8) = 0$$

$$(3x - 8)(x - 3) = 0$$

$$3x - 8 = 0 \quad \text{или} \quad x - 3 = 0$$

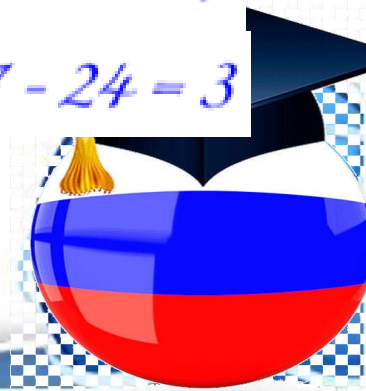
$$3x = 8 \quad \quad \quad x = 3$$

$$x = 2\frac{2}{3}$$

$$y = 9x - 24 \quad 1) \text{ если } x = 2\frac{2}{3}, \text{ то } y = 9 \cdot 2\frac{2}{3} - 24 = 24 - 24 = 0;$$

$$2) \text{ если } x = 3, \text{ то } y = 9 \cdot 3 - 24 = 27 - 24 = 3$$

Ответ: $(2\frac{2}{3}; 0); (3; 3)$.



2. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 59, \\ 10x^2 + 5y^2 = 59x. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 59, \\ 5(2x^2 + y^2) = 59x \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 59, \\ 5 \cdot 59 = 59x \mid : 59 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 59 - 2x^2, \\ x = 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} y^2 = 59 - 2 \cdot 5^2, \\ x = 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} y^2 = 9, \\ x = 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = \pm 3, \\ x = 5 \end{cases}$$

Ответ: $(5; -3); (5; 3)$



Системы неравенств

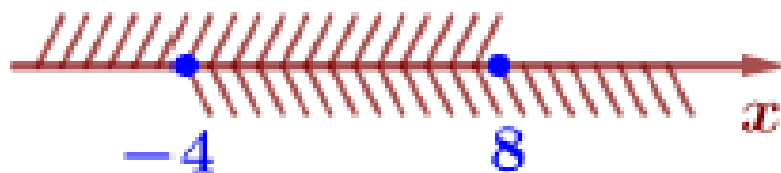


1. Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} \frac{8-x}{4+(1-5x)^2} \geq 0, \\ 3-7x \leq 23-2x. \end{cases}$$

Решение.

т.к. $4+(1-5x)^2 > 0$, то получаем равносильную систему:

$$\begin{cases} 8-x \geq 0, \\ -7x+2x \leq 23-3 \end{cases} \begin{cases} -x \geq -8, & | :(-1) \\ -5x \leq 20 & | :(-5) \end{cases} \begin{cases} x \leq 8, \\ x \geq -4 \end{cases}$$



$$x \in [-4; 8]$$

Ответ: [-4; 8].



Источники:

1. <https://math-oge.sdamgia.ru/>
2. <https://fipi.ru/oge/otkrytyy-bank-zadaniy-oge>
3. Е. А. Ширяева «Задачник ОГЭ 2025»



Благодарю за внимание

